

SAVEZ DRUSTAVA MATEMATICARA I FIZICARA FNRJ

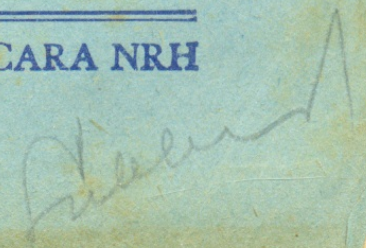
MATEMATIČKO FIZIČKI LIST

ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

2

GODINA VII.
Z A G R E B
1 9 5 6 — 5 7

IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZICARA NRH



»MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST za učenike srednjih škola« izlazi u 4 broja po 40 stranica. Za vrijeme ferija list ne izlazi.
 Pretplata za 4 broja iznosi Din 200. — Pojedini se broj prodaje po Din 60.—
 Pretplatu i narudžbe slati na adresu: »MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST«, Zagreb, 16/III., pošt. pretinac 165 ili na čekovni račun broj 40-KB-2-Z-1080. — Pretplata se može slati i poštanskom uplatnicom.

SADRŽAJ

	Strana
Bazjanac D., Raketa u službi nauke	41
Бандић И., Теориска интерпретација основних проблема геометриских прогресија	45
Ušan J., Konstrukcija kvadratnoga korena kompleksnoga števila	49
Škarica S., O verižnim razlomcima (kraj)	52
Trifunović D., Prilog stereometrijskim nejednačinama	55
Марковић С., Графичко испитивање природе корена квадратне једначине	58
Šindler G., Iz teorije izmjeničnih struja	60
Iz moje radionice i laboratorija:	62
Kosina sa širokim žlijebom (A. Kurelec)	
Kako ću napraviti sunčani sat?	65
Zanimljivosti i razno: Povodom stogodišnjice smrti Nikolaja I. Lobačevskoga. — Još jedan dokaz relacije među aritmetičkom, geometrijskom i harmonijskom sredinom. — Nejednolikost Zemljine rotacije. — Još o Pitagorinim brojevima	67
Nove knjige: Polya G., Kako ću riješiti matematički zadatak? — »Zemlja i svemir«	71
Zadaci i rješenja: A. Zadaci iz matematike. — B. Zadaci iz fizike. — C. Rješenja zadataka iz matematike. — D. Rješenja zadataka iz fizike	72
Vježbe iz matematike za učenike viših razreda gimnazije	82
Vježbe u rješavanju zadataka iz fizike	85
Vježbe iz matematike za prijemni ispit	86
Matematička križaljka	3. str. omota

Uređivački odbor:

AHLIN FRANC, profesor VPŠ, Ljubljana
 BANDIĆ IVAN, profesor VPŠ, Beograd
 HRABAK FRANJO, dir. II. gimn., Zagreb
 JOVANOVIĆ PETAR, prof. VPŠ, Cetinje
 LAZIĆ MARKO, direktor VPŠ, Mostar
 NIKOLOVSKI TOME, profesor, Skopje
 ŠINDLER GUSTAV, profesor, Zagreb

Glavni urednik:

KURELEC ALFRED, profesor VPŠ, Zagreb

Tehnički urednik:

SKREBLIN STJEPAN, h. prof. VPŠ, Zagreb

VLASNIK SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA I FIZIČARA FNRJ
 IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA NAR. REPUBLIKE HRVATSKE

Tisak Grafički zavod Hrvatske

MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST

ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

GODINA VII.
B R O J 2

Z A G R E B

ŠKOL. GOD.
1956. — 1957.

Raketa u službi nauke

DR. DAVORIN BAZJANAC, Zagreb

Uloga rakete u istraživanju ionosfere

Stotine godina služila je raketa uglavnom jednom cilju — uništavanju. Samo se u idejnim projektima o letu u svemir pojavljivala druga raketa, koja bi poslužila čovjeku za osvajanje i istraživanje visina. U kratkom periodu od svega četrdeset godina nauka i tehnika dale su život toj novoj raketi, koja upotrebljava tekuća goriva.

Danas se pred raketnom tehnikom otkriva velika budućnost. Kao odbrambeno oružje raketa je ušla u inventar moderno opremljenih oružanih snaga. Kao sredstvo za postizanje velikih visina raketa će pomoći nauci da otkrije nove tajne prirode, a tehnici da postepeno osvaja bezgranične prostore svemira.

Kako su nastale t. zv. sondažne rakete? Početkom ovog stoljeća učenjaci su došli na ideju, da se raketa primijeni za eksperimentalno proučavanje visokih regiona atmosfere. Prvi, koji je propagirao primjenu rakete kao nosača instrumenata za registriranje podataka o gustoći, temperaturi i sastavu atmosfere, bio je Robert Goddard, profesor fizike na univerzitetu u Princetonu (SAD). On je u jednoj naučnoj publikaciji iz 1919. izložio teorijske osnove tih t. zv. sondažnih raketa s pomoću kojih bi se mogle osvojiti visine znatno veće od onih, koje su postigli sondažni baloni (oko 36 km).

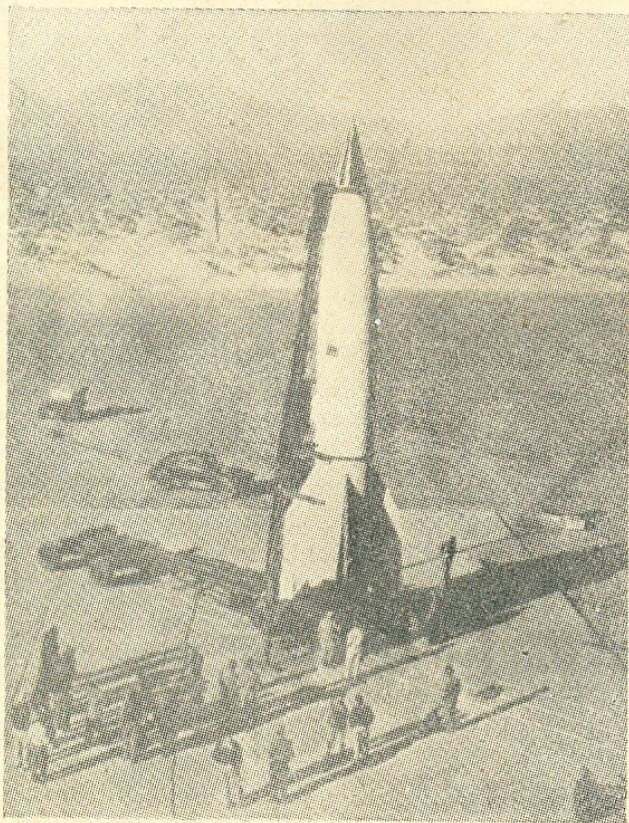
Nakon dugogodišnjih sistematskih istraživanja i pokusa uspjelo je Goddardu 1926. godine da izgradi prvu raketu s tekućim gorivom. Trajanje leta te rakete iznosilo je svega 2,5 sekunde, a brzina oko 100 km/h. Nekoliko godina kasnije njegove su rakete postizale brzine do 850 km/h i visine od nekoliko tisuća metara.

Približno u isto vrijeme jedna grupa entuzijasta u Njemačkoj osnovala je društvo za proučavanje leta u svemir. Oni su u periodu od 1929.—1933. izgradili nekoliko tipova malih raketa s tekućim gorivom. Tako postignuti rezultati u izgradnji i usavršavanju visinskih raketa značili su velik napredak na tom području. Kada je konačno u toku prošlog rata ostvarena dalekometna njemačka raketa u obliku raketne bombe »V-2« pristupilo se u poslijeratnom periodu sistematskim proučavanjima atmosfere s pomoću raketa.

Prva istraživanja počela su u SAD u kolovozu 1945, kada je jedna sondažna raketa tipa »WAC Corporal« s korisnim teretom od oko 12 kg postigla visinu od 70 km. Bila je to mala raketa promjera svega oko 30 cm i dužine oko 5 m. Izgrađena je u laboratoriju za mlazni pogon kalifornijskog univerziteta u Pasadeni. Zbog malog korisnog tereta i male visine nije se mogla održati kao sondažna raketa, ali ona je bila preteča veoma uspješne veće rakete tipa »Aerobee«, koje se konstrukcija uglavnom zasnivala na raketi »WAC Corporal«.

Razvitak modernih sondažnih raketa

Velik podstrek u daljnjem istraživanju visokih slojeva atmosfere dala je činjenica, da je nakon II. svjetskog rata Saveznicima pala u ruke izvjesna količina njemačkih raketnih bombi »V-2«. Oko 100 takvih raketa dopremljeno je u SAD u cilju njihovog detaljnog proučavanja i ispitivanja. Taj je program počeo 1946.



Sl. 1. Jedna od zaplijenjenih raketa »V2« pripremljena je za start na raketnom poligonu »White Sands« (New Mexico). U vrhu rakete ugrađeni su instrumenti za registriranje meteoroloških podataka u visokim slojevima atmosfere, kao i kinofotokamera za snimanje Zemljine površine iz velikih visina

i od samog početka bile su pozvane naučne ekipe iz cijele zemlje, da prisustvuju tim eksperimentima. U vrh rakete »V-2« ugrađeni su mjesto eksploziva različiti instrumenti za automatsko registriranje meteoroloških podataka (sl. 1). Između ostalih izvršen je i ovaj eksperiment:

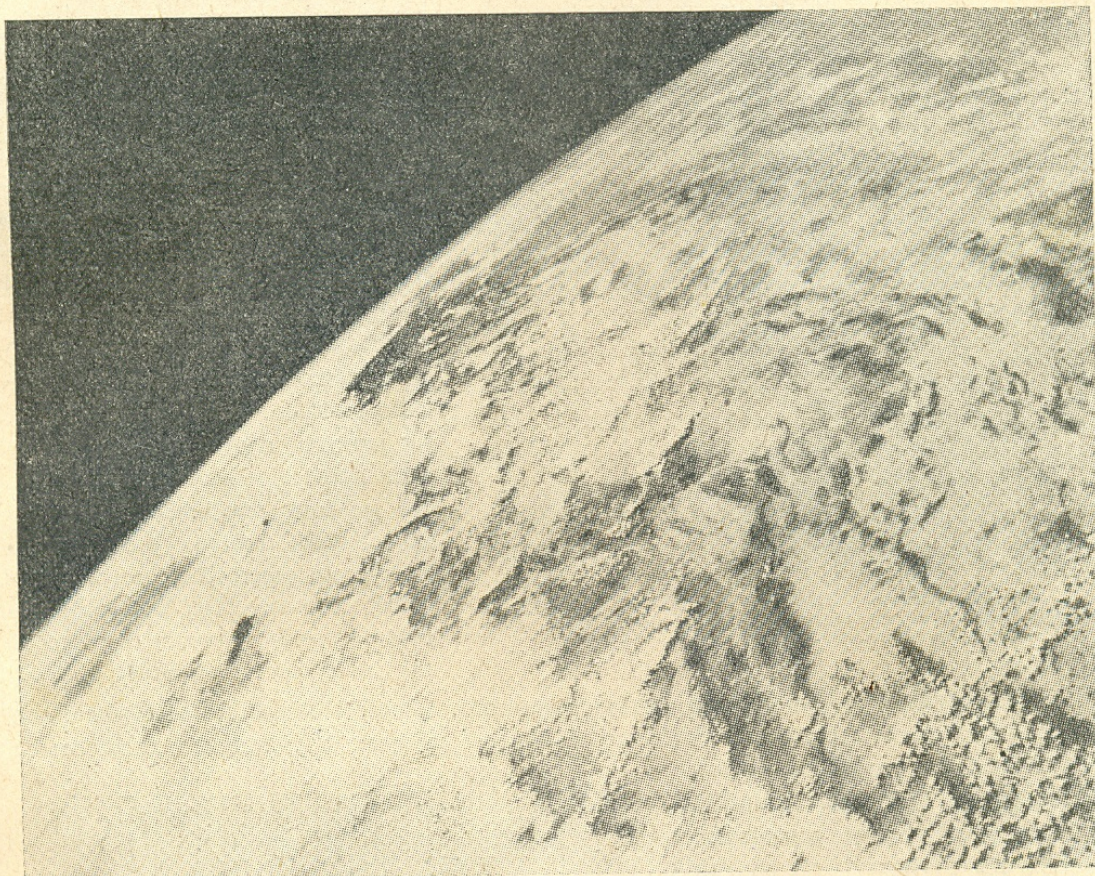
U donji dio rakete pričvršćena je mala filmska kamera, koju pokreće mali motor. Kamera je bila smještena u debeli čelični oklop. Dok se raketa dizala, filmska je kamera snimala Zemljinu površinu. S visine od oko 90 km snimljen je krug promjera od oko 1200 km. Zatim se čelična kamera automatski odvojila od rakete i spustila s pomoću malog padobrana na Zemlju. Snimci su razvijeni i dobiven je jedan od najneobičnijih filmova: izgled Zemlje s visine, na kojoj čovjek nikada nije bio. Kasnije je snimljena Zemljina površina s još većih visina s pomoću rakete »Viking« (sl. 2). Takve će rakete omogućiti, da se snimi cijela Zemljina površina i da se provjeri točnost geografskih karata.

Najveća postignuta visina rakete »V-2« iznosila je oko 185 km. Glavni nedostatak rakete »V-2« bio je što ona nije bila namijenjena za istraživanja visokih slojeva atmosfere. Već u početku tih pokusa uvidjelo se, da treba izgraditi novu sondažnu raketu. Tako je za račun američke ratne mornarice izgrađena nova raketa tipa »Aerobee«. To je veoma jednostavan projektil. Nema nikakvih pomičnih površina i prema tome nema kormila kao »V-2«. Ona se ispaljuje iz lansirnog tornja u cilju početnog vođenja. Pri tome mora dobiti dovoljno veliku brzinu, da bi se pojavila dovoljno velika aerodinamička sila, koja djeluje na repne peraje. To se postiže pogonom u dva stepena. Jedna matična raketa sa čvrstim pogonskim gorivom razvija velik potisak pri startu i daje raketi brzinu od oko 300 m/sek na kraju druge sekunde leta. Zatim se matična raketa odvaja, a raketni motor s tekućim gorivom rakete »Aerobee« stupa u akciju, ubrzavajući je postupno do oko 1200 m/sek na visini od oko 32 km.

Oko 40 raketa »Aerobee« izbačeno je i to velik postotak s potpunim uspjehom. U poređenju s raketom »V-2« raketa »Aerobee« je ne samo mnogo jednostavnija i jeftinija, nego i znatno pogodnija za rukovanje. Ona može ponijeti koristan teret

od oko 70 kg na visinu od oko 130 km. Prazna raketa teži svega oko 100 kg, a snabdjevena je instrumentima i gorivom ukupne težine od oko 320 kg. Dužina iznosi 6 m, a promjer 37,5 cm.

Zatim je izgrađena velika upravljiva raketa tipa »Viking« za istraživanje ionosfere (sl. 3). Dužine je oko 14,5 m, promjera oko 1 m, a njena ukupna težina s gorivom iznosi svega oko 5,5 tona. Maksimalni potisak je 22.700 kg. Prvobitno je



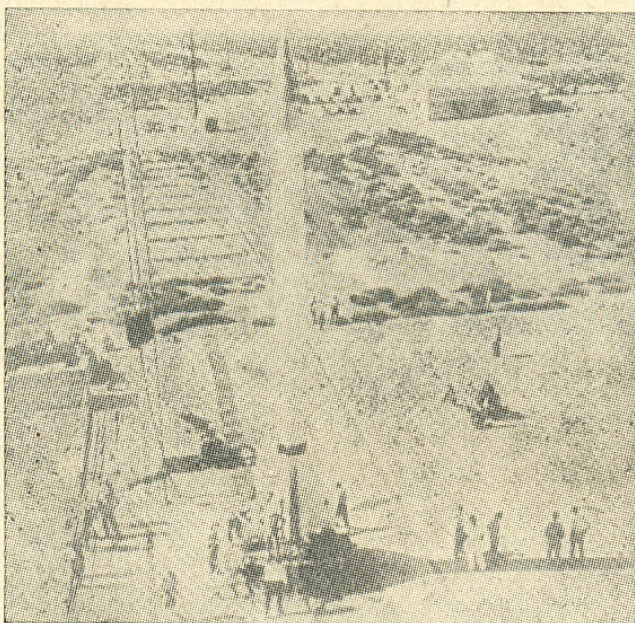
Sl. 2. Automatska filmska kamera ugrađena u vrh sondažne rakete »Viking« snimila je ovaj snimak Zemljine površine s visine od 220 km. Snimljena površina obuhvaća oko 1 550 000 km² Teksasa i Meksika

naručeno deset takvih raketa. Kasnije je ta narudžba proširena. Ispitivanja su vršena dijelom na kopnu, a dijelom na moru. Prva raketa toga tipa ispaljena je 1949. Raketa br. 7. postigla je 1951. visinu od 220 km s korisnim teretom od 250 kg. Raketa br. 11 postigla je 1955. visinu od 253 km. To je dosad objavljeni visinski rekord za jednostepene rakete. Neke od tih raketa ispaljene su s broda USS »Norton Sound« na pacifiku južno od Havajskih otoka. To je bivši brod za snabdijevanje hidroaviona američke ratne mornarice, koji je pretvoren u ploveći laboratorij za ispitivanje raketnih projektila (sl. 4). Na zadnjoj palubi je prostor s potrebnim uređajem za lansiranje raketa, a na prednjoj platforma za poletanje i spuštanje helikoptera. Ovaj služi za brzo pronalaženje glave rakete, koja se spušta s pomoću padobrana.

U toku prošlih 7 godina oko 30 tona korisnog tereta (razni naučni instrumenti) ponijele su rakete »V-2«, »Aerobee« i »Viking« u visine do oko 400 km. Pri tome je registriran velik broj raznih naučnih podataka o svojstvima visokih slojeva atmosfere.

Rezultati istraživanja s pomoću sondažnih raketa

Evo nekoliko podataka o rezultatima tih istraživanja. Određivanje temperature u ionosferi zasniva se na poznatoj zavisnosti brzine zvuka od temperature uzduha. Pri prelazu iz toplog u hladni sloj uzduha zvuk mijenja brzinu. Na taj je način mjerenjem brzine zvučnih valova omogućeno određivanje temperature u visokim

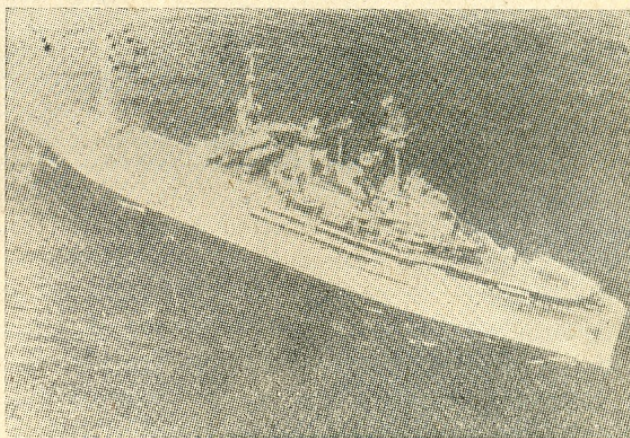


Sl. 3. Američka sondažna raketa tipa »Viking« br. 11 postigla je visinski rekord od 235 km za jednostepene rakete. Slika prikazuje jednu takvu raketu prije starta u ionosferu

slojevima atmosfere. Ta se mjerenja vrše s pomoću oscilirajućih sonda u obliku klina, koje služe za mjerenje Machovog kuta. Pri bacanju rakete br. 7 tipa »Viking« na visinu od 220 km ustanovljeno je, da su temperature gornjih slojeva mnogo niže od ranijih teorijskih predviđanja. To isto važi i za pritisak i gustoću na visinama iznad 200 km. Prilikom tih istraživanja pošlo je stručnjacima za rukom, da odrede vertikalnu raspodjelu ozona na osnovu njegova svojstva da jako upija ultraviolettne zrake. Od velikog geofizičkog interesa su rezultati dobiveni pri mjerenju Zemljinog magnetnog polja na velikim visinama. Oni pokazuju, da postoje veliki strujni sistemi u donjim slojevima ionosfere.

Proučavanje ultraviolettne zrake, meteorita i kozmičkih zraka od posebnog je značenja za astronautiku. Problem zaštite od primarnih kozmičkih zraka mora još čekati na rezultate daljnjih istraživanja. Glavna poteškoća leži u konstrukciji preciznih i pouzdanih instrumenata za registriranje potrebnih podataka. Pri tome se moraju uzeti u obzir velika ubrzanja, vibracije i aerodinamičko zagrijavanje pri letu rakete zbog velikog otpora uzduha.

Napokon treba spomenuti događaj od epohalnog značenja, koji se u okviru istraživanja ionosfere dogodio 24. veljače 1949. na poligonu White Sands (New Mexico). Toga dana poletjela je u visine jedna raketa »V-2«, koja je kao koristan teret nosila u vrhu ugrađenu raketu tipa »WAC Corporal« težine oko 350 kg. Na visini od oko 35 km, neposredno prije nego što je utrošeno gorivo rakete »V-2«, odvojila se iz njenog vrha mala raketa »WAC Corporal« i povećavajući brzinu, koju je dobila od »V-2«, postigla je rekorndu visinu



Sl. 4. Američki brod »Norton Sound« služi za istraživanje ionosfere s pomoću sondažnih raketa na raznim geografskim širinama. Na zadnjem dijelu palube nalazi se toranj za lansiranje raketa tipa »Aerobee«

od 403 km. Maksimalna brzina iznosila je oko 2350 m u sekundi. Bila je to prva dvostepena raketa s tekućim gorivom. Ukupna dužina tako kombinirane rakete iznosila je oko 18 m, a ukupna težina oko 12 t. Za vrijeme tog pokusa registrirano je 27 raznih naučnih podataka.

Perspektive daljnjeg razvitka

Već na visinama od oko 10 km ne može čovjek više disati. Na 100 km visine može se pritisak okolne atmosfere uopće ustanoviti samo s pomoću veoma osjetljivih instrumenata. Na 200 km i najbolji, do sada raspoloživi, instrumenti jedva još uopće reagiraju. Na visinama od oko 400 km broj još postojećih molekula ili pojedinačnih atoma manji je od onog u najboljem »vakuumu«, koji smo u stanju proizvesti u laboratoriju ovdje na dnu zračnog oceana. Prema tome, spomenuta raketa »WAC Corporal«, nalazeći se u svom najvišem položaju, bila je ustvari izvan Zemljine atmosfere.

Što očekuje astronomija od raketne tehnike? Istraživanja ionosfere s pomoću visinskih raketa u uskoj su vezi s problemima leta u prostor izvan Zemljine atmosfere. Sondažne rakete postaju sve više prototipovi budućih svemirskih brodova. Iskustva stečena u izgradnji takvih raketa imat će za posljedicu razvoj sve većih raketa za postizanje još većih visina.

Prvi korak u ostvarenju leta u međuplanetarni prostor bit će umjetni Zemljin satelit bez posade, snabdjeven raznim mjernim instrumentima. Zatim bi slijedio umjetni satelit s posadom. Ostvarenje takvog astrofizičkog opservatorija značilo bi kraj sadanje sljepoće, koja je zbog Zemljinog zračnog omotača nametnuta astronomima. Time bi bio probijen »prozor od mutnog stakla«, kroz koji danas astronomi nastoje da proniknu u tajne svemira. To bi dostignuće bilo za nauku od istog značenja kao otkriće teleskopa, a istodobno bi značilo početak nove epohe u povijesti čovječanstva.

Теориска интерпретација основних проблема геометриских прогресија

ИВАН БАНДИЋ, Београд

1. Познато је да се сви чланови једне геометриске прогресије могу одредити кад су позната два узастопна члана, на пр. први и други члан. Јер, ако су прва два члана a_1 и a_2 , онда је количник прогресије $q = \frac{a_2}{a_1}$, па је, према дефиницији, трећи члан

$$a_3 = a_2 q = a_2 \cdot \frac{a_2}{a_1}, \text{ итд.}$$

Тај исти задатак се може решити и помоћу одговарајућих геометриских конструкција. Овде ће бити изложене две такве конструктивне методе.

Ради једноставности, претпоставићемо у оба случаја да су чланови прогресије позитивни.

(1.1) Конструкцију која следује извео је Торичели (Torricelli, Quadratura parabolae, 1644) и то на овај начин.

Претпоставимо да је први члан прогресије a , а други члан b , и да је $a > b$. Дуж $AB_1 = a$ поставља се тако да крајеви A и B_1 леже на крацима произвољно изабраног угла XOY (сл. 1), з тим се дуж $B_1M = b$ преноси на AB_1 , почевши од B_1 . У тачки M се, даље, конструише паралела са OY која сече OX у тачки B , а затим c , на исти начин, постепено конструишу дужи: $BC_1 \parallel AB_1$, $CC_1 \parallel BB_1$, $CD_1 \parallel BC_1$, итд.

Ослањајући се на познату теорему о отсечцима паралела на крацима датог угла, имамо, узимајући у обзир да је $AB_1 \parallel BC_1$,

$$\frac{BC_1}{AB_1} = \frac{OB}{OA} = \frac{OC_1}{OB_1};$$

ако, даље, посматрамо паралеле BB_1 и CC_1 , налазимо $\frac{OC_1}{OB_1} = \frac{OC}{OB}$, и с обзиром да је

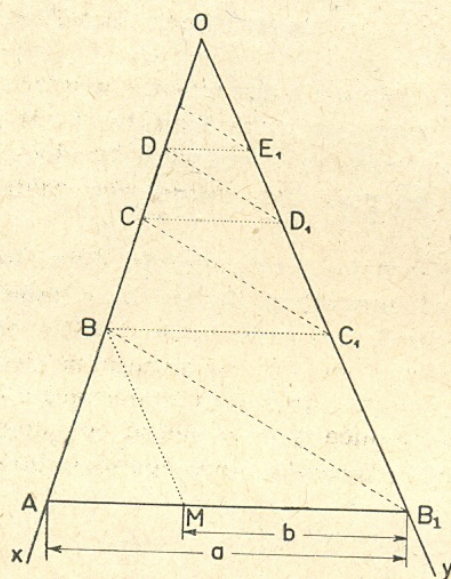
$CD_1 \parallel BC_1$:

$$\frac{OC}{OB} = \frac{CD_1}{BC_1}$$

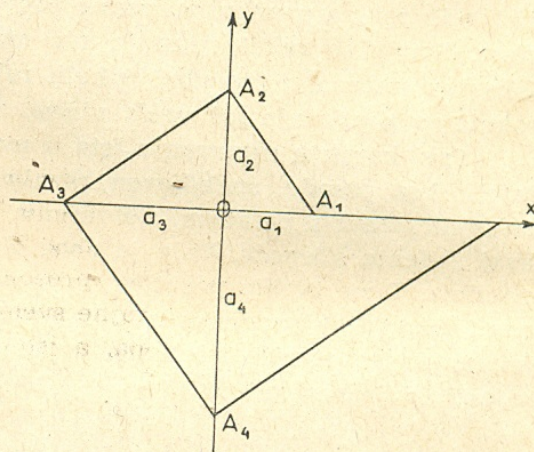
Коначно имамо

$$\frac{BC_1}{AB_1} = \frac{CD_1}{BC_1},$$

другим речима, однос два узастопна паралелна отсечка је константан, што значи да они образују геометриску прогресију (опадајућу) са количником $q = \frac{BC_1}{AB_1}$.



Сл. 1.



Сл. 2.

(1.2) Претпоставимо сада да је геометриска прогресија растућа, и нека су њена прва два члана a_1 и a_2 ($a_2 > a_1$). На осу OX правоуглог координатног система поставићемо дуж $OA_1 = a_1$, а на OY дуж $OA_2 = a_2$ (сл. 2). Права повучена у тачки A_2 нормално на A_1A_3 , сече OX у тачки A_3 . Показаћемо да OA_3 претставља трећи члан прогресије.

Наиме, из правоуглог троугла $A_1A_2A_3$ следује

$$OA_2^2 = OA_1 \cdot OA_3,$$

или

$$a_2^2 = a_1 \cdot OA_3,$$

што се може написати и на овај начин

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{OA_3}{a_2}.$$

Одатле излази, према дефиницији саме прогресије, $OA_3 = a_3$. Конструкцијом нормале $A_3A_4 \perp A_2A_3$ добијемо, даље, четврти члан $OA_4 = a_4$, итд.

Конструкција остаје иста и кад је прогресија опадајућа, само што се у том случају изломљена спирална линија $A_1A_2A_3 \dots$ све више сужава око почетка.

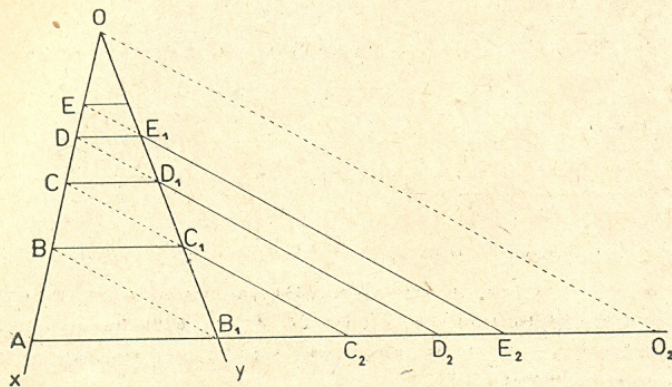
2. Други основни задатак, одређивање збира геометриске прогресије, као и границе збира бесконачне конвергентне прогресије, геометриски је решио наш научник, проф. М. Миланковић. Његова метода унесена је у наше школске уџбенике, па је ученицима добро позната.

Међутим, у исту сврху се може искористити и конструкција Торичелија, изведена у претходном одељку.

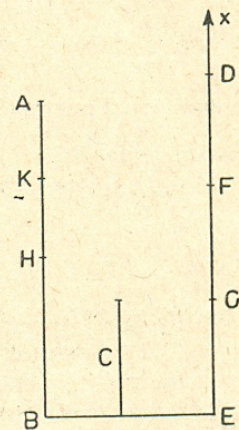
Претпоставићемо да су узастопни чланови прогресије већ конструисани (сл. 3) као дужи AB_1, BC_1, CD_1 , итд.

Ако паралелне дужи $BB_1, CC_1, DD_1, \dots$ продужимо до пресека са продуженом дужи AB_1 , добијемо тачке $C_2, D_2, E_2, \dots$.

Из слике се види непосредно $AC_2 = AB_1 + B_1C_2 = AB_1 + BC_1$; $AD_2 = AC_2 + C_2D_2 = AB_1 + BC_1 + CD_1$, итд. Према томе дужи $AC_2, AD_2, AE_2, \dots$ претстављају, редом, збирове од 2, 3, 4, $\dots$ чланова прогресије.



Сл. 3.



Сл. 4.

Претпоставимо, даље, да је прогресија бесконачна. У том случају се тачке $A, B, C, \dots$, као и $B_1, C_1, D_1, \dots$ неограничено приближују темену O , а збир чланова има као границу дуж AO_2 , конструисану повлачењем паралеле $OO_2 \parallel BB_1$.

Одатле се лако изводи и познати образац за збир бесконачне конвергентне прогресије.

Означимо ли први члан са a_1 , количник са q , а тражени збир са S , из слике налазимо:

$$q = \frac{BC_1}{AB_1} = \frac{OB}{OA} = \frac{O_2B_1}{O_2A} = \frac{S - a_1}{S},$$

а одатле

$$S = \frac{a_1}{1 - q}.$$

3. Вреди још истаћи да је проблем бесконачне прогресије био познат већ и старим Грцима, који га решавају увек геометриским методама, наравно само у специјалним случајевима.

Наводимо, примера ради, два таква позната задатка.

(3.1) Грчки математичар Еуклид (око 300 год. пре н. е.) у својим чувеним „Елементима“, првом систематском математичком уџбенику, дословно каже (књига X, 1): „Ако од једне дужи AB одуземо део HB једнак половини од AB , ако од AH одуземо део KH једнак половини од AH , и тако наставимо, напоследку ћемо наћи једну дуж која ће бити мања од једне дате дужи c “.

Смисао овог става објашњен је на сл. 4. Ту је дата дуж AB , затим $AN = \frac{1}{2} AB$, $AK = \frac{1}{2} AN = \frac{1}{4} AB$, итд.; дата је произвољна дуж c (у средини сл. 4) преношена на полуправу EX , све док се није дошло до дужи $DE > AB$.

Остаје да се покаже да ће се, делећи дуж AB према Еуклидовом ставу, напоследку доћи до једне дужи која је мања од произвољно мале дужи c .

Из слике налазимо непосредно

$$AH = \frac{AB}{2} < \frac{DE}{2} < DG$$

$$AK = \frac{AH}{2} < \frac{DG}{2} = c$$

према томе $AK < c$, што је и требало показати.

Тај став Еуклида, изражен данашњим језиком, гласи: „Разлика између AB и збира $\frac{1}{2}AB + \frac{1}{4}AB + \frac{1}{8}AB + \dots$ мања је од ма које мале величине c “, или прецизније: „Граница збира $\frac{1}{2}AB + \frac{1}{4}AB + \frac{1}{8}AB + \dots$, кад број чланова неограничено расте, јесте AB “.

Ако је $AB = 1$, долазимо до збира;

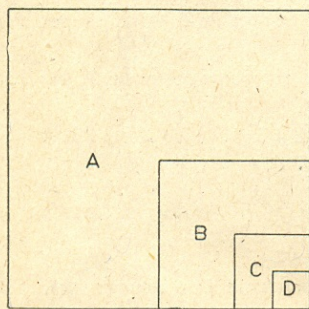
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1,$$

што се, уосталом, слаже с обрасцем изведеним у точ. 2.

(3.2) Архимед (III. век пре н. е.) у свом делу „Квадратура параболе“ износи следећи став: „Ако је дат изврстан број величина A, B, C, D, E , таквих да се свака од њих садржи четири пута у претходној, онда је збир тих величина, увећан за $\frac{1}{3}$ најмање величине E , једнак $\frac{4}{3}$ највеће величине A “.

Величине које наводи Архимед могу бити, очевидно, претстављене као површине квадрата (сл. 5), тако да је страна сваког квадрата, двапут мања од стране претходног квадрата.

Сам став се може проверити на овај начин: Нека је



Сл. 5.

$$u = \frac{1}{3}B, \quad x = \frac{1}{3}C, \quad y = \frac{1}{3}D, \quad z = \frac{1}{3}E.$$

Тада имамо:

$$B + u = B + \frac{1}{3}B = \frac{1}{4}A + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}A = \frac{1}{3}A$$

$$C + x = C + \frac{1}{3}C = \frac{1}{4}B + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}B = \frac{1}{3}B$$

$$D + y = \frac{1}{3}C, \quad E + z = \frac{1}{3}D$$

Одатле се налази сабирањем:

$$(B + C + D + E) + (u + x + y + z) = \frac{1}{3}(A + B + C + D),$$

па како је $u + x + y + z = \frac{1}{3}(B + C + D)$, имамо

$$B + C + D + E + Z = \frac{1}{3}A.$$

Додајући обема странама A , и стављајући $Z = \frac{1}{3}E$, из последње једнакости добијемо

$$A + B + C + D + E + \frac{1}{3}E = \frac{4}{3}A,$$

што је требало показати.

Данас се исти задатак решава на овај начин.

Пошто величине $A, B, C, D, \dots$ образују геометриску прогресију са количником $q = \frac{1}{4}$, то је збир n чланова

$$S_n = A \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} A - \frac{1}{3} A \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1},$$

па како је

$$a_n = A \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1},$$

имамо

$$S_n = \frac{4}{3} A - \frac{1}{3} a_n, \text{ или } S_n + \frac{1}{3} a_n = \frac{4}{3} A,$$

а то се у свему слаже с Архимедовим ставом.

Konstrukcija kvadratnega korena kompleksnega števila

UŠAN JANEZ, Vršac

$\sqrt[n]{\alpha} = \beta$ је такође у обсегу комплексних штевила дефиниран з еначбо $\alpha = \beta^n$. Кер је па квадрат комплексног штевила зопет комплексно штевило, можемо квадратни корен комплексног штевила таколе наставити

$$\sqrt{a + ib} = x + iy.$$

З квадрирањем тег а наставка добио

$$x^2 - y^2 + 2xyi = a + ib.$$

Две комплексни штевили ста па по дефиницији енаки кад ар се ујемата в реалних и имажинарних компонентах. Зато је

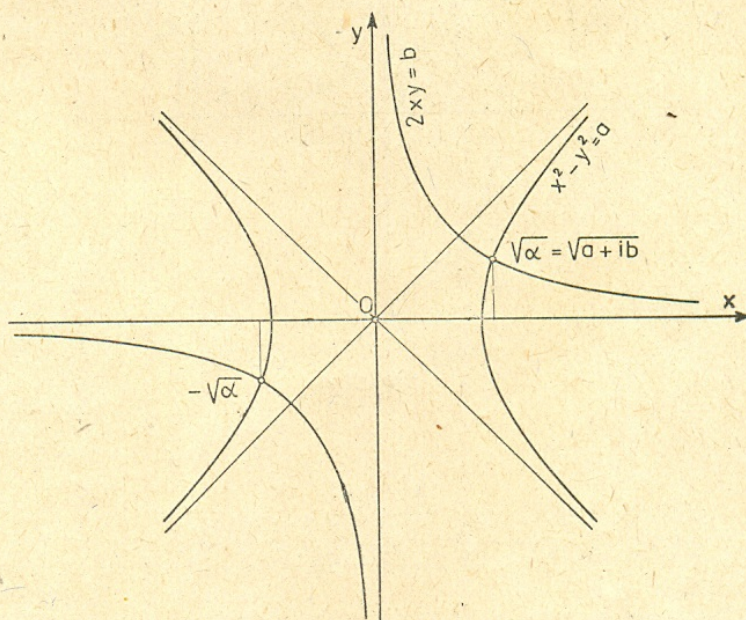
$$x^2 - y^2 = a \text{ и } 2xy = b \quad (1)$$

Решитев тег а система еначб на м потем да реално компоненто x и имажинарно компоненто y квадратног корена штевила $a + ib$. Графично ју од тод добио кот пресек енакостраничних хипербола (1). (Сл. 1.).

★

Геометрично па можемо долочити други корен комплексног штевила кар з крогом и премико. Равно то си хоћемо огледати!

Нај бо наша комплексна равнина долочена з координатним системом xy , кјер пomenи x реално ос (апсцисна ос) и y имажинарно ос (ординатна ос). Комплексно штевило $a + ib$ геометрично уподобимо на теј равнини з точко ки има за апсцисо a , за ординато па b . (Правимо да је та точка слика комплексног штевила $a + ib$). Конјугирано к тему је па уподобљено з точко зрcalно к теј на ос x . Абсолютна вредност теи штевил је по дефиницији $+\sqrt{a^2 + b^2}$, ии је геометрично далјика ки веже координатно изходишче з точко $T(a, b)$.



Sl. 1.

Koren kompleksnega števila smo takole zapisali

$$x + iy = \sqrt{a + ib}.$$

Pa k temu številu privzemimo še njemu konjugirano, ki ga moramo takole zapisati

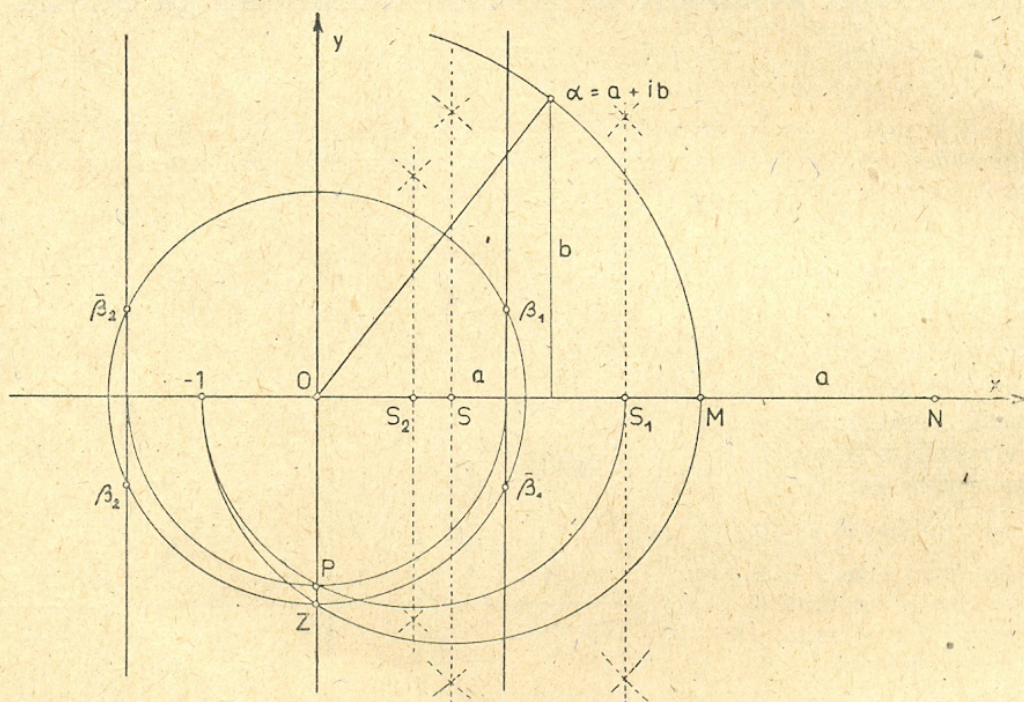
$$x - iy = \sqrt{a - ib}^*.$$

Če ju zmnožimo dobimo

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (2)$$

(2) je za spremenljivki x in y enačba kroga v središčni legi z polmerom $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Konstrukcija polmera (2) je kaj preprosta, saj gre za geometrično sredino daljic 1 in $\sqrt{a^2 + b^2}$ (Sl. 1.). Praktično to storimo na sledeč način. Najprej v koordinatni sistem xy vnesemo število $\alpha = a + ib$ katerega drugi koren hočemo konstruirati; abscisa slike tega števila je kot smo omenili a ordinata pa b . Daljica $O\alpha$ je potem $\sqrt{a^2 + b^2}$. To prenesemo na absciso os tako, da je $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$. Nato z simetralo določimo raspolovišče S daljice OM , ter okoli nje opišemo krog z polmerom SM . Presek tega kroga z ordinatno osjo je točka Z ; OZ je po tem geometrična sredina daljic $\sqrt{a^2 + b^2}$ in 1, oziroma polmer kroga (2). Ostane nam le še da ga opišemo z središčem v O .



Sl. 2.

Rešitvi je torej treba iskati na krogu (2)!

Ker števili $\sqrt{a + ib}$ in $\sqrt{a - ib}$ ležita na premici vzporedni z imaginarno osjo, je treba poiskati le še to!

Če seštejemo prvo enačbo (1) in enačbo (2) dobimo tole enačbo

$$2x^2 = \sqrt{a^2 + b^2} + a,$$

oziroma tole

$$x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \quad (3)$$

(3) sta enačbi dveh premic z zaželeno lastnostjo. Tudi te se prav preprosto konstruirata.

* V to se prepričamo že kar z kvadriranjem nastavkov $x + iy$ in $x - iy$ ter upoštevanjem da so si to konjugirani števili.

Izraz na desni v (3) je namreč geometrična sredina za 1 in aritmetičko sredino absolutne vrednosti števila $a + ib$ ter njegove realne komponente a . (Konstrukcijo teh moremo na isti sliki (Sl. 2.) nadaljevati, recimo na tale način. Daljico OM podaljšamo za a , nakar je $ON = \sqrt{a^2 + b^2} + a$. Z simetralo daljice ON določimo na tej točko S_1 in je OS_1 že omenjena aritmetična sredina. Kot v primeru konstrukcije polmera kroga (2) določimo razpolovišče daljice $-1 S_1$ ki naj bo S_2 . Z središčem v S_2 opišemo krog polmera $S_1 S_2$. Ordinarno os ta krog seče v P . OP je po tem ravno iskana geometrična sredina daljic 1 ter aritmetične sredine a in $\sqrt{a^2 + b^2}$, ki pa je razdalja premic (3) od osi y . Končno v razdalji OP od osi y konstruiramo premici (3).).

Preseki premic (3) in kroga (2) so tedaj slike kvadratnega korena števil $a + ib$ ter $a - ib$. Te korene zapišimo z $\beta_1, \bar{\beta}_1, \beta_2, \bar{\beta}_2$.

Zaradi (3) imamo opravka z dvema rešitvama, ki se razlikujeta le za znak. Če je namreč $\beta_1 = \sqrt{a + ib}$ je $\bar{\beta}_1 = \sqrt{a - ib}$ (kar je iz slike neposredno razvidno!) in $\bar{\beta}_1$ ne vzamemo v poštev, saj smo ga le kot pripomoček privzeli. Iz slike je nadalje razvidno, da je $\beta_2 = -\beta_1$ (in $\bar{\beta}_2 = -\bar{\beta}_1$). Z kvadriranjem β_1 in β_2 potem vidimo, da sta ravno ta kvadratna korena števila $a + ib$. Torej moramo tudi v opsegu kompleksnih števil pri iskanju drugega korena upoštevati oba znaka.

Vprašanje je še po eksistenci presekov premic (3) z krogom (2). Če () vstavimo v (2), dobimo

$$y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} - \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}$$

Od tod preseki eksistirajo vselej kadar je

$$\sqrt{a^2 + b^2} - \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2} \geq 0$$

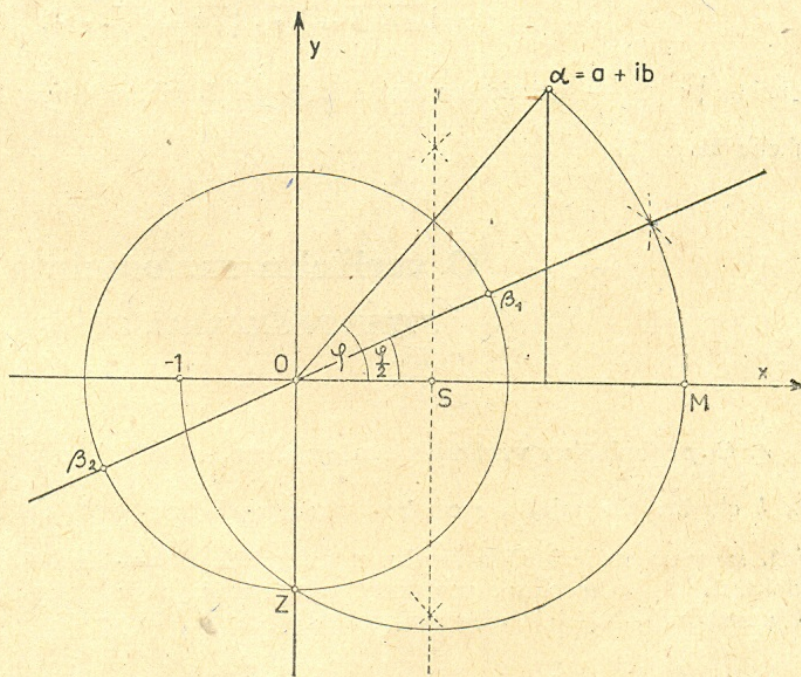
oziroma

$$\sqrt{a^2 + b^2} \geq a.$$

To je pa res vedno izpolnjeno. Za $b \neq 0$ je namreč

$\sqrt{a^2 + b^2} > a$, za $b = 0$ pa je $\sqrt{a^2 + b^2} = a$.

* *



Sl. 3.

Zgoraj pokazana konstrukcija se z dodatnim razmotrevanjem da mnogo poenostaviti! To si še oglejmo.

Slike drugega korena kompleksnega števila namreč moremo dobiti že kot presek kroga (2) z simetralo kota ki ga tvori absolutna vrednost števila $a + ib$ in pozitivna smer apscisne osi. (sl. 3.).

Naj bo kot med absolutno vrednostjo števila $a + ib$ in pozitivno smerjo abscisne osi φ . Med absolutno vrednostjo β_1 in osjo x pa φ_1 . Iz prejšnje konstrukcije potem sledi, da je

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (m)$$

$$\text{in } \cos \varphi_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2\sqrt{a^2 + b^2}}} \quad (n)$$

Desno stran v (n) moremo tudi takole pisati

$$\sqrt[3]{1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Zaradi (m) je potem

$$\cos \varphi_1 = \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}}$$

Od tod pa je $\varphi_1 = \frac{\varphi}{2}$, in smo trditev dokazali.

Ni se težko prepričati da gre simetrala kota φ tudi skozi β_2 .

Ta konstrukcija je pa tudi veliko bolj pregledna, saj nam se ne vpletata korena števila konjugiranega k $a + ib$.

Na koncu naj omenim, da pričujoča konstrukcija kaj hitro sledi če si pomagamo z višjo matematiko. Tam namreč konstrukcija sloni na dejstvu, da se kompleksno število more zapisati v obliki $a + ib = r \cdot e^{i\varphi}$, kjer je $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, φ pa istega pomena kot pri nas. Od tod potem dobimo da je

$$\sqrt{a + ib} = \sqrt{r} \cdot \sqrt{e^{i\varphi}} = \sqrt{r} \cdot e^{i \frac{\varphi}{2}}$$

Tu imata $\sqrt{r}$ in $\frac{\varphi}{2}$ isti pomen kot r in φ pri številu $a + ib$. Tako smo do zgornje konstrukcije že prišli.

O verižnim razlomcima

STJEPAN ŠKARICA, Zagreb

(Kraj)

4. O periodskim verižnim razlomcima. a) Ako je a cio broj, koji nije potpun kvadrat, b cio broj ili nula, a c cio broj različit od nule, onda se broj $\frac{\sqrt{a+b}}{c}$ zove *algebarski broj 2. stepena*; on je korijen kvadratne jednadžbe $c^2x^2 - 2bcx + b^2 - a = 0$. Lagrange i Euler su dokazali, da se apsolutna vrijednost takvog broja može prikazati u obliku beskonačnog verižnog razlomka, koji je uvijek periodski, i obrnuto. Na pr.

$$A) \sqrt{39} = 6 + \frac{1}{x_1}; \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{39} - 6} = \frac{\sqrt{39} + 6}{3} = 4 + \frac{1}{x_2}; \quad x_2 = \frac{3}{\sqrt{39} - 6} = \frac{\sqrt{39} + 6}{1} = 12 + \frac{1}{x_3}; \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{39} - 6} = x_1; \quad \sqrt{39} = 6; (4, 12).$$

$$B) \frac{\sqrt{21} - 2}{3} = 0 + \frac{1}{x_1}; \quad x_1 = \frac{3}{\sqrt{21} - 2} = \frac{3(\sqrt{21} + 2)}{17} = \frac{\sqrt{189} + 6}{17} = 1 + \frac{1}{x_2};$$

$$x_2 = \frac{17(\sqrt{189} + 11)}{68} = \frac{\sqrt{189} + 11}{4} = 6 + \frac{1}{x_3}; \quad x_3 = \frac{4(\sqrt{189} + 13)}{20} = \frac{\sqrt{189} + 13}{5} = 5 + \frac{1}{x_4};$$

$$x_4 = \frac{5(\sqrt{189} + 12)}{45} = \frac{\sqrt{189} + 12}{9} = \frac{\sqrt{21} + 4}{3} = 2 + \frac{1}{x_5}; \quad x_5 = \frac{3}{\sqrt{21} - 2} = x_1; \quad \frac{\sqrt{21} - 2}{3} = 0; (1, 6, 5, 2).$$

$$C) \frac{22 - \sqrt{15}}{7} = 2 + \frac{1}{x_1}; \quad x_1 = \frac{8 + \sqrt{15}}{7} = 1 + \frac{1}{x_2}; \quad x_2 = \frac{\sqrt{15} - 1}{2} = 1 + \frac{1}{x_3};$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{15} + 3}{3} = 2 + \frac{1}{x_4}; \quad x_4 = \frac{\sqrt{15} + 3}{2} = 3 + \frac{1}{x_5}; \quad x_5 = \frac{\sqrt{15} + 3}{3} = x_3; \quad \frac{22 - \sqrt{15}}{7} =$$

$$= 2; 1, 1, (2, 3).$$

Verižni razlomci u primjerima A) i B) su čisto periodski, a razlomak u C) je mješovito periodski.

Zadaci. Potvrdi računom, da je: a) $\sqrt{3} = 1; (1, 2);$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2} = 0; 1, (6, 2);$ c) $\sqrt{7} =$

$$= 2; (1, 1, 1, 4);$$
 d) $\frac{3 + \sqrt{3}}{4} = 1; 5, (2, 6);$ e) $\frac{3 - \sqrt{3}}{4} = 0; 3, (6, 2);$ f) $\frac{\sqrt{21} + 2}{3} = 2; (5, 6, 1, 2);$

$$g) \frac{\sqrt{15} + 3}{2} = 3; (2, 3);$$
 h) $\frac{\sqrt{15} + 2}{3} = 1; (1, 22, 1, 1, 1, 1, 1);$ i) $\frac{22 + \sqrt{15}}{7} = 3; 1, (2, 3).$

b) Da riješimo obrnut zadatak, t. j. da zadani periodski verižni razlomak pretvorimo u algebarski broj 2. stepena, upotrijebit ćemo postupak sličan onome za pretvaranje periodskog decimalnog razlomka u običan. Na pr. $4,3\bar{18} = 4,3 + 0,0\bar{18}$; očito je $0,0\bar{18} = 0,018\bar{18}$. Stavimo i $0,0\bar{18} = x$, izlazi $1000x = 18 + 10x$; odatle je $x = \frac{18}{990}$, a

$$4,3\bar{18} = 4,3 + \frac{18}{990} = \frac{43(100 - 1) + 18}{990} = \frac{4318 - 43}{990} = \frac{95}{22}.$$

Da periodski verižni razlomak, na pr. $4; 3, (1, 8)$, pretvorimo u algeb. broj 2. stepena, stavimo $0; (1, 8) = x$. Očito je $0; (1, 8) = 0; 1, 8, (1, 8)$, t. j. $x = 0; 1, 8 + x$, ili

$$x = \frac{8 + x}{9 + x}; \quad x^2 + 8x - 8 = 0; \quad x = -4 \pm \sqrt{24}.$$

Budući da je $0; (1, 8)$ pozitivno, to je $x = \sqrt{24} - 4$, i prema tome je

$$4; 3, (1, 8) = 4; 3 + x = \frac{13 + 4x}{3 + x} = \frac{-3 + 8\sqrt{6}}{-1 + 2\sqrt{6}} = \frac{93 + 2\sqrt{6}}{23}.$$

Pokus: $\frac{93 + \sqrt{24}}{23} = 4 + \frac{1}{x_1}; \quad x_1 = 3 + \frac{1}{x_2}; \quad x_2 = 1 + \frac{1}{x_3}; \quad x_3 = 8 + \frac{1}{x_4}; \quad x_4 = x_2;$ doista je

$$\frac{93 + 2\sqrt{6}}{23} = 4; 3, (1, 8).$$

2. primjer. $1; 2, 3, (4, 5); \quad x = 0; (4, 5); \quad x = 0; 4, 5, (4, 5)$, t. j. $x = 0; 4, 5 + x$, ili

$$x = \frac{5 + x}{21 + 4x}; \quad 4x^2 + 20x - 5 = 0; \quad x = \frac{\sqrt{30} - 5}{2}; \quad 1; 2, 3, (4, 5) = 1; 2, 3 + x = \frac{10 + 3x}{7 + 2x} =$$

$$= \frac{5 + 3\sqrt{30}}{4 + 2\sqrt{30}} = \frac{80 - \sqrt{30}}{52}.$$

3. primjer. $2; (1, 1, 1, 4); \quad x = 0; (1, 1, 1, 4) = 0; 1, 1, 1, 4 + x$, t. j. $x = \frac{9 + 2x}{14 + 3x};$

$$x^2 + 4x - 3 = 0; \quad x = \sqrt{7} - 2, \text{ i prema tome: } 2; (1, 1, 1, 4) = 2 + x = \sqrt{7}.$$

Napomena. Prema gornjim primjerima je očito, da za čisto periodski verižni razlomak $x = 0; (a_1, a_2, \dots, a_m)$ izlazi uvijek jednačba oblika $x = \frac{a + bx}{c + dx}$, ili $dx^2 + (c - b)x - a = 0$, gdje su a, b, c i d pozitivni brojevi, i prema tome je jedan korijen posljednje jednačbe pozitivan, a drugi negativan. Traženo x je jednako pozitivnom korijenu.

Zadaci. Pretvori u algebarski broj 2. stepena i načini pokus: 1.) $4; 7, (2, 6);$ 2.) $5; 1, 6, 2;$ 3.) $0; (1, 2, 1);$ 4.) $3; (2, 1, 2, 6);$ 5.) $2; 1, 2, (3, 2, 1);$ 6.) $7; (3, 1, 1, 3, 14);$

Rezultati: 1.) $\frac{10 - \sqrt{3}}{2}$; 2.) $\frac{10 + \sqrt{3}}{2}$; 3.) $\frac{\sqrt{10} - 1}{3}$; 4.) $\frac{\sqrt{182}}{4}$; 5.) $\frac{91 + \sqrt{37}}{36}$; 6.) $\sqrt{53}$.

c) Ako je A pozitivan cio broj, a nije potpun kvadrat, onda se daje dokazati, da je $\sqrt{A}$ jednak čisto periodskom verižnom razlomku, t. j. $\sqrt{A} = a_1; (a_2, a_3, \dots, a_{k-1}, a_k)$; na pr. $\sqrt{10} = 3; (6)$; $\sqrt{3} = 1; (1, 2)$; $\sqrt{7} = 2; (1, 1, 1, 4)$; $\sqrt{39} = 6; (4, 12)$; $\sqrt{53} = 7; (3, 1, 1, 3, 14)$; $\sqrt{914} = 30; (4, 3, 3, 4, 60)$; $\sqrt{71} = 8; (2, 2, 1, 7, 1, 2, 2, 16)$. Primjeri nam pokazuju, da je dio perioda pred posljednjim članom simetričan, a posljednji član da je jednak dvostrukom prvom članu.

Našli smo (t. 2, c), da za približne vrijednosti verižnog razlomka vrijede nejednadžbe:

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_3}{q_3} < \dots < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} < \dots < \sqrt{A} < \dots < \frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \dots < \frac{p_4}{q_4} < \frac{p_2}{q_2},$$

t. j. prava vrijednost simbola $\sqrt{A}$ ili $a_1; (a_2, a_3, \dots, a_k)$ je zajednička granica lijevog i desnog beskonačnog niza približnih vrijednosti pripadnog verižnog razlomka, jer se razlika

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} - \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} = \frac{1}{q_{2n}q_{2n+1}}$$

može učiniti po volji malenom, ako se samo uzme n dosta veliko. To nam kazuje, da se $\sqrt{A}$ može s pomoću dviju susjednih približnih vrijednosti pripadnog verižnog razlomka odrediti brzo i lako na mnogo decimala.

Na pr. $\frac{1}{1} < \frac{5}{3} < \frac{19}{11} < \dots < \frac{3691}{2131} < \dots < \sqrt{3} < \dots < \frac{1351}{780} < \dots < \frac{7}{4} < \frac{2}{1}$. Kako je $\frac{1351}{780} - \frac{3691}{2131} = \frac{1}{780 \cdot 2131} = 0,0000006\dots$, svaka od tih približnih vrijednosti daje $\sqrt{3}$ na 5 decimala točno; doista je $1351:780 = 1,7320512\dots$, $3691:2131 = 1,7320506\dots$, i prema tome je $\sqrt{3} = 1,73205\dots$

Tako s pomoću 3. i 4. približne vrijednosti nalazimo $\frac{117}{37} < \sqrt{10} < \frac{721}{228}$, i stoga je $\sqrt{10} = 3,162\dots$ na 3 dec. točno; a s pomoću 9. i 10. približne vrijednosti $\frac{590}{223} < \sqrt{7} < \frac{717}{271}$ dobivamo $\sqrt{7} = 2,6457\dots$ na 4 dec. točno.

Napomena. Ako iracionalni broj nije algebarski 2. stepena na pr. $\sqrt[3]{5}$, $\log 23$, njemu pripadni verižni razlomak je beskonačan, ali neperiodski. Određivanje članova takvog razlomka postaje teško, pa im se približne vrijednosti izračunavaju obično s pomoću beskonačnih konvergentnih redova.

Zadaci. 1. Odredi na 4 decimale točno: a) $\sqrt{39} = 6; (4, 12)$; b) $\sqrt{22} = 4; (1, 2, 4, 2, 1, 8)$; c) $\sqrt{53} = 7; (3, 1, 1, 3, 14)$; d) $\sqrt{914} = 30; (4, 3, 3, 4, 60)$!

2. Pretvori u verižni razlomak, a onda izračunaj na 5 dec. točno: a) $\sqrt{11}$; b) $\sqrt{13}$; c) $\sqrt{41}$; d) $\sqrt{142}$; e) $\sqrt{89}$; f) $\sqrt{77}$; g) $\sqrt{445}$!

5. **Pell-ova jednadžba.** a) Kod izračunavanja donje i gornje granice broja π Arhimed je za $\sqrt{3}$ upotrebio jednom približno manju vrijednost $\frac{265}{153}$, a drugi put približno veću vrijednost $\frac{1351}{780}$; prva je 9., a druga 12. približna vrijednost razlomka $1; (1, 2) = \sqrt{3}$. Ne možemo tvrditi, da Arhimed nije znao za verižne razlomke, ali je vjerojatnije, da je postupao ovako:

Iz $1^2 - 3 = -2 = (1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})$ nalazi $(1 - \sqrt{3})^3 \cdot (1 + \sqrt{3})^3 = 2 \cdot (5 - 3\sqrt{3}) \cdot 2(5 + 3\sqrt{3}) = 4(5^2 - 3 \cdot 3^2) = (-2)^3$ i odatle $(5 - 3\sqrt{3})(5 + 3\sqrt{3}) = -2$; kubirajući ponovno dobiva $265^2 - 3 \cdot 153^2 = -2$. Iz te jednadžbe nalazi

$$\sqrt{3} = \sqrt{\left(\frac{265}{153}\right)^2 + \frac{2}{153^2}} = \frac{265}{153} \sqrt{1 + \frac{2}{265^2}};$$

prema t. 2. c) razlika $\sqrt{3} - \frac{265}{153}$ manja je od $\frac{1}{153^2}$.

Iz $2^2 - 3 \cdot 1^2$, izračunavši potencije $(2 \pm \sqrt{3})^2$ i $(2 \pm \sqrt{3})^6$, našao je jednačbe $7^2 - 3 \cdot 4^2 = 1$ i $1351^2 - 3 \cdot 780^2 = 1$, i odatle $\sqrt{3} \approx \frac{1351}{780}$ s pogreškom $\frac{1351}{780} - \sqrt{3} < \frac{1}{780^2}$.

b) Prema predašnjem imaju jednačbe $x^2 - 3y^2 = -2$ i $x^2 - 3y^2 = 1$ beskonačno mnogo rješenja u cijelim brojevima, koje možemo odrediti, ako nam je jedno od njih poznato. Ali kako naći jedno rješenje na pr. jednačbe $x^2 - 53y^2 = 1$, kad je njezino rješenje u najmanjim cijelim brojevima $x = \pm 66249$, $y = \pm 9100$?

Ako je A cio pozitivan broj, koji nije potpun kvadrat, a N cio broj, neodređena jednačba $x^2 - Ay^2 = N$ zove se *Pell-ova jednačba*. Najvažniji oblici te jednačbe jesu:

$$x^2 - Ay^2 = \pm 1, \quad x^2 - Ay^2 = \pm 2, \quad x^2 - Ay^2 = \pm 4.$$

Zabavit ćemo se jednačbom $x^2 - Ay^2 = 1$. Ona ima beskonačno mnogo rješenja. Neka je $\sqrt{A} = a_1; (a_2, a_3, \dots, a_{k-1}, a_k)!$ Ako je k neparan broj, a n cio pozitivan broj, onda je $p_{2n}^{(k-1)} - Aq_{2n}^{(k-1)} = 1$; kad je k paran broj, onda je $p_{2n}^{(k-1)} - Aq_{2n}^{(k-1)} = 1$. Dokaz izostavljamo, iako nije težak. Na pr.

1. $\sqrt{7} = 2; (1, 1, 1, 4), k = 5, p_4 = 8, q_4 = 3; 8^2 - 7 \cdot 3^2 = 1; p_8 = 127, q_8 = 48; 127^2 - 7 \cdot 48^2 = 16129 - 16128 = 1$, i t. d.

2. $\sqrt{41} = 6; (2, 2, 12); k = 4; p_6 = 2049, q_6 = 320; 2049^2 - 41 \cdot 320^2 = 1$, i t. d.; brojevi p_{3n} i q_{3n} , gdje je n neparan broj, daju rješenja jednačbe $x^2 - 41y^2 = -1$; na pr. $p_3 = 32, q_3 = 5; 32^2 - 41 \cdot 5^2 = -1$.

c) Ako je $x_1^2 - Ay_1^2 = \pm 1$, onda je $(x_1^2 + Ay_1^2)^2 - A(2x_1y_1)^2 = 1$, jer je lijeva strana te jednačbe $(x_1^2 - Ay_1^2)^2$. Želimo li dakle odrediti $\sqrt{A}$ na više decimala, možemo tim načinom ponovnim kvadriranjem brzo doći do potrebnih približnih vrijednosti. Na pr. $8^2 - 7 \cdot 3^2 = 1; 8^2 + 7 \cdot 3^2 = 127; 2 \cdot 8 \cdot 3 = 48; 127^2 - 7 \cdot 48^2 = 1; 127^2 + 7 \cdot 48^2 = 32257; 2 \cdot 127 \cdot 48 = 12192; 32257^2 - 7 \cdot 12192^2 = 1$; približna vrijednost $32257 : 12192 = 2,6457513123 \dots$ daje $\sqrt{7}$ na 7 decimala točno, jer je pogreška manja od $1 : 12192^2 = 0,000000067 \dots$

Zadaci. 1. Našao si $\sqrt{78} = 8; (1, 4, 1, 16); \sqrt{85} = 9; (4, 1, 1, 4, 18)$; nađi najmanje cjelobrojno pozitivno rješenje jednačbi: $x^2 - 78y^2 = 1$ i $x^2 - 85y^2 = 1$!

2. Odredi s pomoću rješenja u 1. zadatku $\sqrt{78}$ i $\sqrt{85}$ na 8 decimala točno i kontroliraj dobivene rezultate vađenjem kvadratnog korijena po školskom načinu!

Prilog stereometriskim nejednačinama

DRAGAN TRIFUNOVIĆ, Beograd

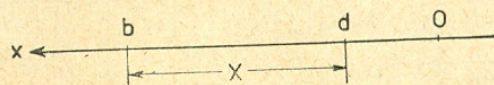
1. Usled nedovoljno datih elemenata u stereometriskim zadacima javljaju se nemogućnosti da se tačno izračunaju tražene količine Q , recimo zapremine i površine. U tim slučajevima nalaze se dve količine p i q za koje se može pouzdano tvrditi da se vrednost X količine Q nalazi u razmaku

$$p \leq X \leq q. \quad (\text{A})$$

(to jest, da nije veća od p , a ni manja od q).

Geometrijski gledano, znači da na brojnoj liniji treba odrediti takav zatvoreni razmak (p, q) kome vrednost X sigurno pripada:

Pri tome treba voditi računa, da ako je naprimjer, X_1 nađena približna vrednost za element Q , tada je ona dopuštena, to jest, povoljna, ako je



Sl. 1.

$$\text{MIN} \{ X - X_1 \} = R_n$$

odnosno, ako je odstupanje R_n od stvarne veličine minimalno.

Do aproksimativnih veličina X_n dolazi se na razne načine. Ovde ćemo pokazati jedan opštiji slučaj približnog izračunavanja koji se iskorišćava u stereometričkim izračunavanjima.

2. Mih. Petrović [1] je pokazao da se do granica razmaka (A) dolazi preko nejednačina*)

$$0 \leq ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} \quad (B)$$

$$i \quad \frac{(a+b+c+\dots)^2}{n} \leq a^2 + b^2 + c^2 + \dots \leq (a+b+c+\dots)^2 \quad (C)$$

za slučaj n aritmetičkih brojeva $a, b, c, \dots$.

Ovde ćemo pre sveg pokazati jedan opštiji slučaj nejednačine (B) i nomenklativni dokaz nejednačine (C).

Naime, u nejednačini (B) sadržan je stav Cauchy-eve nejednačine, jer je

$$0 \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

koji govori o uzajamnoj vezi geometriske i aritmetičke sredine.

STAV I. Ako je $a_k (k=1, 2, \dots, n)$ niz aritmetičkih brojeva, tada je ispunjena nejednačina

$$0 \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

odnosno, geometrijska sredina brojeva a_k je manja ili jednaka aritmetičkoj sredini odgovarajućih brojeva.

Dokaz stava je jednostavan i ide preko potpune indukcije [2], a za slučaj $n=2$ preko relacije

$$\frac{a_1^2 + a_2^2}{2} \geq \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)^2$$

Stavom I Petrovićeva nejednačina (B) dobija generalniji oblik

$$0 \leq a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \leq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^n}{n^n} \quad (B')$$

koja se primenjuje u stereometričkim zadacima sa više nepoznatih veličina.

U [1] Mih. Petrović prikazuje drugu nejednačinu (C) za nalaženje granica p i q na osnovu identičnosti

$$\begin{aligned} n(a^2 + b^2 + \dots) &\equiv (a+b+\dots)^2 + (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 + \dots \\ a^2 + b^2 + \dots &\equiv (a+b+\dots)^2 - 2(ab+ac+bc+\dots) \end{aligned}$$

Međutim ako se izraz (C) подели sa n i uzme u obzir leva veza nejednačine, imamo da je

$$\left(\frac{a+b+c+\dots}{n} \right)^2 \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2 + \dots}{n} \quad (C')$$

(C') ukazuje da drugo pravilo (C) sadrži osobinu aritmetičke sredine, pa je, prema tome, treba i tretirati u tom pravcu bez prikazane identičnosti.

Dokaz osobine (C') je jednostavan i proizlazi iz Schwarz-ove nejednačine

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \geq 0$$

(vidi [3]).

*) Petrović dokazuje nejednačinu (B) preko identičnosti $ab \equiv \frac{1}{4} [(a+b)^2 - (a-b)^2]$.

2. 1. U geometriskim zadacima često se nailazi na izraze u kojima se nalaze proizvodi ili zbrojevi kvadrata više količina. Ako se na takve izraze, a kojih ima dosta u stereometriji, pa i u statistici, primene nejednačine

$$0 \leq a_1 \cdot a_2 \cdots a_n \leq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^n}{n^n} \quad (B')$$

i

$$\frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{n} \leq a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \leq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \quad (C)$$

dolazi se do stereometrijskih nejednačina, koje određuju razmak kretanja tražene nepoznate količine.

Nekoliko primera će pokazati pravu vrednost stereometrijskih nejednačina.

I PRIMER: zadatak da se izračuna zapremina V loptine kalote, kad se zna visina h kalote i relacija

$$a\sqrt{3} + h = \sigma$$

gde je a poluprečnik kalote, ne može se rešiti. Ali, kao što je poznato, zapremina kalote je

$$V = \frac{\pi}{6} h(3a^2 + h^2) = \frac{\pi}{6} h[(a\sqrt{3})^2 + h^2].$$

Kako je ovde $a\sqrt{3} + h = \sigma$, a prema pravilu (C) je

$$\frac{\sigma^2}{2} \leq (a\sqrt{3})^2 + h^2 \leq \sigma^2$$

to se dobiva razmak kome pripada rešenje zadatka pod gore navedenim uslovima

$$\frac{1}{2} \frac{\pi h}{6} \sigma^2 \leq V \leq \frac{\pi h}{6} \sigma^2$$

II PRIMER: Treba izračunati zapreminu V bureta od paraboličnih otsečaka, ako se zna visina H i s određeno vezom

$$2D\sqrt{2} + d\sqrt{3} - 2s = 0$$

gde je D prečnik srednjeg kruga, a d prečnik bazisa.

Kako je zapremina V bureta od paraboličnih otsečaka

$$V = \frac{\pi H}{15} (2D^2 + \frac{3}{4}d^2 + Dd)$$

to imamo sledeće.

Iz uslova zadatka imamo da je

$$D\sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}d = s$$

a zapreminu napišimo ovim izrazom

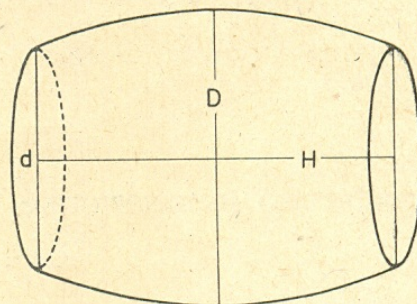
$$V = \frac{\pi H}{15} \left[(D\sqrt{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}d \right)^2 + Dd \right].$$

Pošto je prema nejednačinama (B') i (C)

$$0 \leq Dd \leq \frac{\sqrt{6}}{12} s^2, \quad \frac{s^2}{2} \leq (D\sqrt{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}d \right)^2 \leq s^2$$

to se prema obrascu za zapreminu dobiva da je

$$V \leq \frac{\pi H}{15} (s^2 + \frac{\sqrt{6}}{12} s^2) \quad \text{i} \quad V \geq \frac{\pi H}{15} \left(\frac{s^2}{2} + 0 \right)$$



Sl. 2.

prema čemu se za zapreminu V javlja dvostruka nejednačina

$$\frac{\pi H}{30} s^2 \leq V \leq \frac{\pi H}{30} s^2 \left(2 + \frac{\sqrt{6}}{6} \right).$$

Iz dobivene nejednačine proizlazi da ne postoje dva bureta od kojih bi jedno bilo, po zapremini, više od 2,408 puta veće od drugog.

III PRIMER: ako je ρ poluprečnik srednjeg kruga zarubljene kupe, a l strana, tada treba izračunati površinu P te kupe.

Ako se sa R i r označe poluprečnici kružnih osnovica kupe, a l stranica, biće

$$P = \pi(R^2 + r^2) + \pi l(R + r).$$

Kako je prema pravilu (C)

$$\frac{(R + r)^2}{2} \leq R^2 + r^2 \leq (R + r)^2$$

a

$$\rho = \frac{R + r}{2}, \quad (R + r)^2 = 4\rho^2$$

to prema obrascu za površinu zarubljene kupe dobiva se

$$P \leq 4\pi\rho^2 + 2\pi l\rho \quad \text{ i } \quad P \geq 2\pi\rho^2 + 2\pi l\rho$$

što daje krajnju stereometričku nejednačinu:

$$2\pi\rho(\rho + l) \leq P \leq 2\pi\rho(2\rho + l)$$

*

Preporučujem čitaocima da sami nađu nekoliko primera, da prouče navedenu literaturu i mogućnost primene Чебышев-ljeve (1821 — 1894) nejednačine

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n}$$

na gore prikazani problem i o istom izveste uredništvo časopisa, ili da dobivene zaključke saopšte na naučnom kružoku škole

NAVODI

[1] Mih. Petrović, Stereometriske nejednačine, Zbornik radova Mat. inst. SAN 3 (1953), str. 1 — 4.

[2] V. Popović, Jedan dokaz Cauchy-eve nejednačine, VESNIK, I, 3 — 4, Beograd, 1949, str. 133.

[3] D. Trifunović. O jednoj teoremi matematičkih sredina, Mat. fiz. list, VI, 3, Zagreb, 1955-56, str. 108.

Графичко испитивање природе корена квадратне једначине

САВА МАРКОВИЋ, Гуприја

Покажимо како се графички решавају задаци у којима се тражи природа корена квадратне једначине за различите вредности параметра p који се појављује у коефицијентима те јединице.

Сем тога покажимо како се графички налази положај корена квадратне једначине према датим бројевима, када се p мења.

У ту сврху проматрат ћемо квадратну једначину облика

$$(ap \pm b)x^2 + (cp \pm d)x + ep + f = 0$$

де је p променљив параметар.

Нека је према томе дата квадратна једначина

$$(1 + p)x^2 - (1 + p)x - 2p = 0$$

Покажимо графички како се мењају корени када се p мења од $-\infty$ до $+\infty$.
Решимо зато дату једначину по p

$$x^2 + px^2 - x - px - 2p = 0$$

$$-px^2 + px + 2p = x^2 - x$$

$$p = \frac{x^2 - x}{-x^2 + x + 2}$$

$$p = \frac{x(x-1)}{(2-x)(x+1)}$$

и конструишимо одговарајући график у правоуглом координатном систему ХОР.

Хоризонталну асимптоту ћемо добити ако видимо чему тежи p кад $x \rightarrow \infty$, тј.

$$p = \frac{1 - \frac{1}{x}}{-1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}},$$

$$p \rightarrow -1$$

или пак, напишимо у облику

$$p = \frac{x^2 - x}{-x^2 + x + 2} = -1 + \frac{2}{-x^2 + x + 2} = -1 + \frac{2}{(2-x)(x+1)}.$$

Видимо да

$$p = -1 - \frac{2}{x^2}, \quad p \rightarrow -1 - 0 \text{ за } x \rightarrow \pm \infty.$$

Вертикалне асимптоте се добијају кад се нађу корени имениоца

$$p = \frac{x(x-1)}{(2-x)(x+1)} \quad p \rightarrow \infty, \text{ за } x \rightarrow -1 \text{ и } x \rightarrow 2.$$

Дијаграм сече x осу у тачкама $x = -1$ и $x = 1$, јер је за те вредности $p = 0$, док сече ординатну осу у тачки $p = 0$, јер је $p = 0$ за $x = 0$.

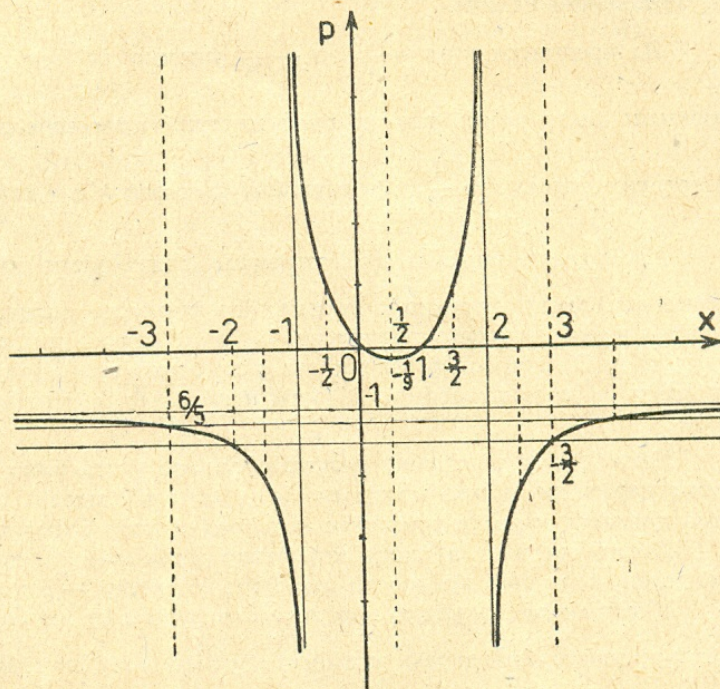
Кад x расте од $-\infty$ до -1 , p опада од -1 до $-\infty$, за $x = -1$, $p = \mp \infty$.

Кад x расте од -1 до $\frac{1}{2}$, p опада од $+\infty$ до $-\frac{1}{9}$, за $x = \frac{1}{2}$, $p = -\frac{1}{9}$. Кад x расте од $\frac{1}{2}$ до 2 , p расте од $-\frac{1}{9}$ до $+\infty$; за $x = 2$, $p = \pm \infty$. Када x расте од 2 до $+\infty$, p расте од $-\infty$ до -1 (сл. 1).

Значи дијаграм полази испод хоризонталне асимптоте $p = -1$, тежи ка $-\infty$ уз вертикалну асимптоту $x = -1$, долази са супротне стране из $+\infty$, сече апсцисну осу у тачки $x = 0$, затим је сече у тачки $x = 1$, тежи ка $+\infty$ уз вертикалну асимптоту $x = 2$, затим опет долази са супротне стране из $-\infty$, приближава се хоризонталној асимптоти, али је не прелази.

Пошто смо нашли одговарајући график, можемо сада лако да проучимо промену корена наше квадратне једначине када се p мења од $-\infty$ до $+\infty$.

Уочимо за p било коју вредност мању од -1 , односно, ма коју тачку на оси p испод тачке -1 . Ако повучемо праву паралелно апсцисној оси, видећемо да ће сећи криву у двема тачкама, чије су апсцисе корени квадратне једначине за одговарајућу



вредност параметра p . Значи, добијемо два корена од којих је један позитиван а други негативан; позитиван је корен по апсолутној вредности већи. За $p = -1$ оба корена су бесконачно велика.

За вредности p од -1 до $-\frac{1}{9}$ видимо да нема реалних корена, јер паралела повучена било којом тачком овог интервала не сече дијаграм. За $p = -\frac{1}{9}$ добијамо двоструки корен $x = \frac{1}{2}$, јер паралела са x оси у тој тачки додирује дијаграм.

Посматрамо ли сада даље промене примећујемо да за вредности p од $-\frac{1}{9}$ до 0 имамо два реална позитивна корена, јер паралеле апсцисној оси секу дијаграм у двама тачкама чије су апсцисе позитивне. За $p = 0$ имамо два корена код којих је један нула а други 1 . За све остале вредности p које су веће од нуле имамо два реална корена од којих је један позитиван а други негативан; позитиван је већи по апсолутној вредности.

Како је при решавању разних проблема често врло важно да се зна за које вредности параметра p има квадратна једначина оба корена између датих бројева a и b , то ћемо показати како се графички непосредно могу одредити резултати.

Испитајмо зато за исту квадратну једначину за које вредности параметра p она има један, а за које вредности два корена између -3 и $+3$.

У том циљу повучимо паралеле оси p чије су једначине $x = -3$ и $x = 3$. Нађимо потом ординате оних тачака у којима паралеле секу дијаграм. То су $p = -\frac{3}{2}$ и $p = -\frac{6}{5}$.

Ако повучемо паралеле апсцисној оси у било којој тачки ординате видећемо да једначина има оба корена у размаку -3 и $+3$ за $-\infty < p < -\frac{3}{2}$ и $-\frac{1}{9} < p < +\infty$. За $p = -\frac{1}{9}$ имамо један двоструки корен, док само један корен имамо за $-\frac{3}{2} < p < -\frac{6}{5}$.

Iz teorije izmjeničnih struja

(Tema za seminar)

GUSTAV ŠINDLER, Zagreb

Među temama za seminar iz prirodnih nauka za VII. razred gimnazija istaknuta je tema: Periodske funkcije u prirodnim naukama. Zadatak ove teme jest povezivanje matematike s fizikom odnosno s tehnikom. Donji materijal može djelimično poslužiti naznačenom zadatku.

Pojave, koje se odvijaju tako, da se nakon određenog vremenskog razmaka ponavljaju, nazivamo periodičnima.

Izmjena dana i noći vrši se periodično, njihalo na satu periodično mijenja svoj položaj, a kod izmjenične struje napetost i jakost periodično mijenjaju svoje vrijednosti. Postupno i pravilno periodično mijenjanje neke pojave matematički opisujemo trigonometrijskim funkcijama sinusa odnosno kosinusa.

Tako nam izraz

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi) \quad (1)$$

opisuje periodično mijenjanje jakosti izmjenične struje. Ovdje i predstavlja trenutnu vrijednost struje. Poznavanje ove vrijednosti nije uvijek od osobita značaja, jer je promjenljiva. Tjemena vrijednost i fazni pomak mogu nam dati dublji uvid u fizikalne osnove problema o izmjeničnoj struji. Ali I_m i φ nisu nam direktno dostupni

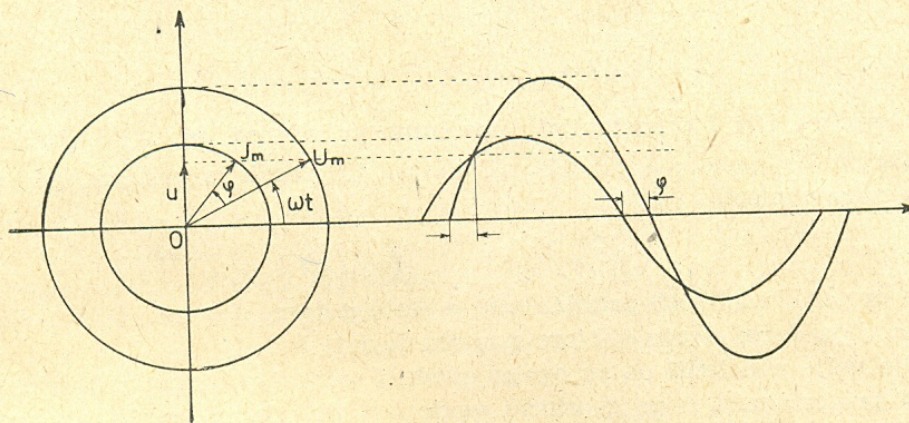
u naprijed spomenutoj formuli. Slijedeće grafičko razmatranje iznijet će ih jasnije na vidjelo. Uzimajući za osnov tjemenu vrijednost i fazni kut možemo pomoću vektorskog predočivanja vrlo zorno tumačiti neke osobine izmjeničnih struja.

Podimo od sl. 1. Na lijevom dijelu nacrtan je vektor $\vec{U}_m$, koji jednoliko rotira oko jedne točke uzete za ishodište koordinatnog sustava. Veličina ovog vektora predstavlja tjemenu vrijednost izmjenične napetosti. Kutna brzina je istovremeno kružna frekvencija ω ove napetosti. Projiciramo li svakog trenutka ovaj vektor na ordinatnu os u , tad vrijednost te projekcije

$$u = U_m \sin \omega t$$

daje trenutnu vrijednost napetosti.

Kut ωt može se uzeti i kao apscisa, dok trenutne vrijednosti nanosimo u smjeru ordinate. Tako dobijemo desno nacrtanu sinusoidu na sl. 1. Ova slika crtana je tako, da je trenutna vrijednost napetosti za početak brojanja vremena ($t = 0$) jednaka nuli.



Sl. 1.

Neki drugi vektor $\vec{I}_m$ (dakle za prikazivanje neke izmjenične struje iste frekvencije) neka je prema napetosti pomaknut za kut φ . Taj vektor neka rotira s istom kutnom brzinom ω kao i vektor $\vec{U}_m$. Projekcije njegovih trenutnih položaja matematički opisuje izraz (1). On predočuje struju, koja ide ispred napetosti za kut φ . Stoga i kut pomaka između oba vektora na grafikonu zorno predstavlja razliku u fazi između struje i napetosti, kad ona postoji.

Tako vidimo, da vektorsko predstavljanje ne samo da može zamijeniti neki analitički oblik, već u ovome slučaju, obzirom na fazni kut, imamo zorniji prikaz periodičnih električnih pojava, odnosno električnih veličina.

Upotreba vektorskog dijagrama omogućuje da produbimo matematičko opisi-
vanje električnih pojava primjenom kompleksnog ili t. zv. simboličkog računa u
nauci o elektricitetu odnosno u elektrotehnici.

Kako je kod vektora bitna njihova veličina i međusobni položaj, dok je položaj ovisan o vremenu nebitan, tad se može apstrahirati od vrtnje i matematički opisati položaj vektora, koji miruju u koordinatnom sustavu. Ovog puta koordinatni sustav crtati ćemo u kompleksnoj ravnini (sl. 2). Kompleksna ravnina predstavlja skup kompleksnih brojeva, a orijentirana je prema dvjema međusobno okomitim osima od kojih je jedna realna, a druga imaginarna. U takvoj koordinatnoj ravnini svaka je točka određena s dva broja u_1 i u_2 , koji se mogu spojiti u kompleksni broj

$u_1 + ju_2$. Ovdje je slovo $j = \sqrt{-1}$ uzeto za imaginarnu jedinicu, kako je to običaj u elektrotehnici, da se ne zamjenjuje sa znakom i , kojim se obilježava jakost struje.

Ovaj kompleksni broj može poslužiti kao matematički izraz za vektor, koji je povučen od ishodišta do točke P. Stoga pišemo

$$\vec{U} = u_1 + ju_2 \quad (2)$$

u_1 i u_2 nazivaju se realnom i imaginarnom komponentom vektora. Na isti način vrijedi za struju

$$\vec{I} = i_1 + j \cdot i_2.$$

Uvedemo li u račun kut smjera vektora, tad se može pisati

$$\vec{U} = U \cos \alpha + j U \sin \alpha = U (\cos \alpha + j \sin \alpha)$$

$$\vec{I} = I \cos \beta + j I \sin \beta = I (\cos \beta + j \sin \beta).$$

U ovim izrazima U i I predstavljaju apsolutne vrijednosti od $\vec{U}$ i $\vec{I}$. Euler je pronašao relaciju $e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$, gdje je e baza prirodnih logaritama, pa se gornje jednačbe mogu pisati

$$\vec{U} = U e^{j\alpha}, \quad \vec{I} = I e^{j\beta} \quad (3)$$

Oba ova oblika (2) i (3) primjenjuju se često u kompleksnom računu. Jednačbe (3) izražavaju položaj dvaju vektora pomoću faznog kuta.

Ovdje valja podsjetiti da su ovako uvedeni vektori pomoćne računske veličine u ravnini prikazivanja, a ne prostorni vektori u fizikalnom smislu. To su dužine, koje kruže oko ishodišta, i koje zaustavljamo u rotaciji radi izračunavanja.

Kad je vektorski dijagram postavljen, tad ništa ne stoji na putu, da ga opet kao sistem rotiramo oko ishodišta. Jasno je, da se pri tome mogu međusobno povezivati samo vektori s istom kutnom brzinom, dakle veličine izmjenične struje iste frekvencije. Ovako uvedenj vektori izmjenične struje nazivaju se vremenskim vektorima.

Tako nas je grafičko i analitičko razmatranje dovelo do novih zornijih mogućnosti predočivanja, racionalnijeg, efikasnijeg opisivanja i dubljeg poimanja jedne vrste periodičnih pojava (izmjenične električne struje i napetosti).

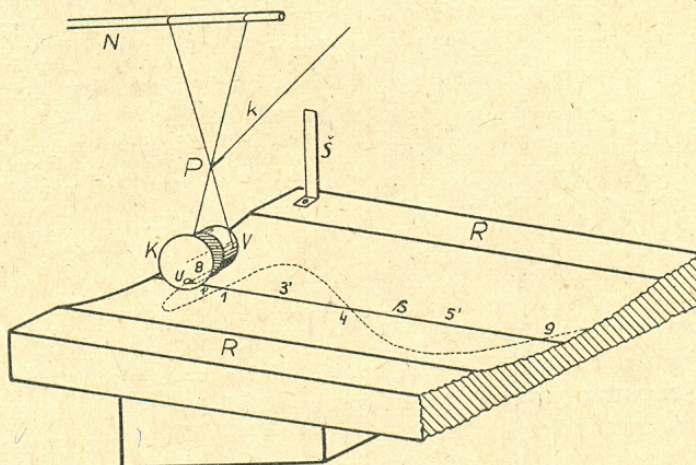
Literatura: Oberdorfer — Lehrbuch der Elektrotechnik Bd. I, S. 381.

IZ MOJE RADIONICE I LABORATORIJA

Kosina sa širokim žlijebom

Uzdruž suhe (javorove) daske, dugačke oko 1,50 m, široke 18 do 20 cm, a debele oko 3 cm, izdubljen je 12 cm širok žlijeb, kojeg je poprečni presjek kružni luk polumjera oko 20 cm. Ta će nam daska poslužiti kao kosina za ispitivanje zakona jednoliko-ubrzanog gibanja. (Izraditi je može i svaki bolji stolar).

Sredinom žlijeba povučena je tušem ravna crta s . U udaljenosti 4 cm od gornjeg ruba kosine prilijepimo uski pravokutni komadić B bakelita ili debljeg kartona, dugačak oko 2,5 cm, širok 3 mm, a debeo oko 1 mm i to tako da po duljini stoji točno okomito na središnjoj liniji s , a poprečna mu ploha dodiruje tu liniju. Čeličnu kuglicu promjera 2,85 cm (a može imati i koji milimetar manje ili više)



stavimo točno na s ispred malog pravokutnika B , koji kuglica dodiruje. Lakim udarcem čekića po kuglici, napravi se pod njom u žlijebu mala plosnata udubina U , u koju će se kuglica smjestiti svaki put prije početka eksperimenta. Pod gornji kraj kosine stavimo 4 do 5 cm visoki drveni kvadar. Libelom, koju stavljamo na raznim mjestima poprijeko kosine (na njene ravne rubove R), ustanovimo, da li je kosina pravilno položena. Mali metalni valjak V , manje mase nego što je ima kuglica, obješen je pomoću dviju na valjčiću utaljenih žica, da bi nam poslužio kao njihalo koje će uvijek jednakim impulsom udariti po kuglici. Duljina tog njihala je oko 16 cm; svakako mora biti manja od polumjera ($r = 20$ cm) luka žlijeba na kosini. Na mjestu P , gdje se žice presijecaju, privežemo komadić konca k , dugačak oko 30 cm, a na poprečnoj šipki N , na kojoj visi njihalo, isturpijamo male žlijebiće za žice. Tu poprečnu šipku učvrstimo na stativ tako, da možemo njihalo dizati i spuštati. Njihalo tad tako namjestimo, da prednja ploha C valjčića svojom sredinom dodiruje kuglicu (v. sliku!) i to tako, da središte kugle leži na produženju osi valjčića, a ta os mora biti okomita na središnjicu s žlijeba. (Na tu okolnost treba pomno pripaziti, jer o njoj u mnogome ovisi kvaliteta rezultata). Sad pomoću niti k povučemo njihalo iz mirnog položaja, zatim nit naglo popustimo (ali ne ispustimo iz ruke) tako, da valjčić udari o kuglicu i stavi je u gibanje. Čim se valjčić odbio od kuglice, povučemo ga natrag, da ne bi kuglici smetao pri njenom daljem gibanju. (Valjčić toliko povučemo iz mirnog položaja, da kuglici dade amplitudu od otprilike 4 cm; da bi amplituda bila uvijek ista, učvrstit ćemo na rubu kosine i na odgovarajućem mjestu, do kojeg treba valjčić izvući, malu šipku $Š$ od čvrstog lima ili drva). Stavljanje u pokret kuglice dobro uvježbamo.

Sad prelazimo na izvedbu samog eksperimenta. Uхватimo kuglicu nazubljenim kliještima i dobro je načadimo u plamenu svijeće, pa je tad stavimo u udubinu U na početku kosine; pritom, drugom rukom izvučemo iz mirnog položaja valjčić pomoću niti k do šipke $Š$. Stavimo kuglicu u pokret, kao što smo upravo opisali, i kuglica će se gibati niz kosinu opisujući putanju sličnu sve više razvučenoj sinusoidi. To je rezultat sastavljenog gibanja kuglice i to iz njihanja po žlijebu

i jednoliko-ubrzanog gibanja niz kosinu. Stoga nam kuglica presijeca središnju liniju s u jednakim vremenskim razmacima, uvijek nakon pola titrajnog vremena njihanja kuglice po žlijebu. Time kuglica sama obilježava svoje putove prevaljene u pojedinim vremenskim odsječcima, zbog svog jednoliko-ubrzanog gibanja niz kosinu. U tom je i prednost ove kosine pred klasičnom Galileijevom: načađena kuglica sama ucrtava svoj put niz kosinu i one odsječke putova jednoliko-ubrzanog gibanja u pojedinim vremenskim razmacima, koje pred očima učenika, kuglica označuje na mjestima, gdje ona presijeca središnju liniju s .

1. Odnos putova u pojedinim vremenskim odsječcima. Izmjerimo redom duljine putova $s'_1, s'_2, \dots, s'_7$ prevaljene u pojedinim odsječcima vremena, označene na središnjoj crti s kosine. (Mjesta, na kojima je kuglica prešla liniju s istaknemo olovkom poprečnim malim crticama, da bismo točnije mogli izmjeriti spomenute putove). Budući da se ti putovi odnose kao neparni brojevi, vrijedi relacija

$$\frac{s'_1}{1} = \frac{s'_2}{3} = \frac{s'_3}{5} = \dots = \frac{s'_7}{13} = s'_1.$$

Ako je eksperiment dobro izvršen, vidjet ćemo, da se svi kvocijenti, do na 3—4% među sobom podudaraju, čime je na kosini eksperimentalno utvrđena poznata relacija o odnosu putova u pojedinim vremenskim odsječcima pri jednoliko-ubrzanom gibanju, što znači, da je gibanje niz kosinu doista jednoliko-ubrzanom gibanje.

U jednom dobro uspjelom eksperimentu, bili su ti putovi ovakvi: 2,7; 8,3; 13,3; 19,2; 23,7; 29,7; 34,7 cm; a pripadni kvocijenti: 2,70; 2,77; 2,66; 2,74; 2,63; 2,70; 2,67; prema tome je bila srednja vrijednost tog kvocijenta: 2,70, što znači, da je najveće odstupanje od srednje vrijednosti (najveća pogreška bila 0,07 ili 2,6% od srednje vrijednosti tog kvocijenta).

Napomena. Prva dva puta s'_1 i s'_2 i pripadne kvocijente, moći ćemo uzeti u obzir samo kod potpuno uspjelih eksperimenata; inače ćemo uzeti u račun samo putove, počevši od s'_3 i pripadne kvocijente.

2. Odnos putova, prevaljenih u proteklom vremenu. Budući da su pri jednoliko-ubrzanom gibanju putovi proporcionalni kvadratu proteklog vremena, moraju kvocijenti $\frac{s_1}{1}, \frac{s_2}{2^2}, \frac{s_3}{3^2}, \dots, \frac{s_7}{7^2}$ biti među sobom jednaki ($s_1, s_2, \dots, s_7$ su putovi prevaljeni u 1. odsječku vremena, odnosno u prva dva odsječka zajedno, ... konačno u prvih sedam odsječaka vremena zajedno). Izmjerimo, dakle, te putove na središnjoj liniji kosine, pa napravimo spomenute kvocijente. Ako je eksperiment dobro izveden, moraju se svi ti kvocijenti, dakako u granicama eksperimentalnih pogrešaka, međusobno podudarati (eventualno izuzevši prvi i drugi kvocijent), iz čega ponovo izlazi, da je gibanje kuglice niz kosinu doista jednoliko-ubrzanom.

U našem već spomenutom eksperimentu bili su ti putovi: 2,7; 11; 24,3; 43,5; 67,2; 96,9; 131,6 cm, a pripadni kvocijenti $\frac{s_i}{i^2}$ bili su: 2,70; 2,75; 2,70; 2,72; 2,69; 2,69; 2,69, odakle je srednja vrijednost tih kvocijenata 2,71. Prema tome najveće odstupanje od srednje vrijednosti (najveća pogreška) bilo je 0,04. t. j. nešto manje od 1,5%.

3. Određivanje akceleracije jednoliko-ubrzanog gibanja niz kosinu. Kao što je jednoliko gibanje određeno i karakterizirano svojom konstantnom brzinom, tako je jednoliko-ubrzanom gibanje određeno svojom konstantnom akceleracijom. Odrediti akceleraciju jednoliko ubrzanog gibanja znači odrediti samo to gibanje. Kako ćemo (najtočnije) odrediti akceleraciju na našoj kosini? Postavit ćemo kosinu u horizontalan položaj i zanjhati kuglicu poprijeko u žlijebu kosine (s amplitudom 4 cm); izmjerimo zapornim satom trajanje dvadesetak njihaja kuglice, čime lako dobivamo vrijeme jednog njihaja. Sad lako izračunamo na pr. vrijeme 7 njihaja, pa put s_7

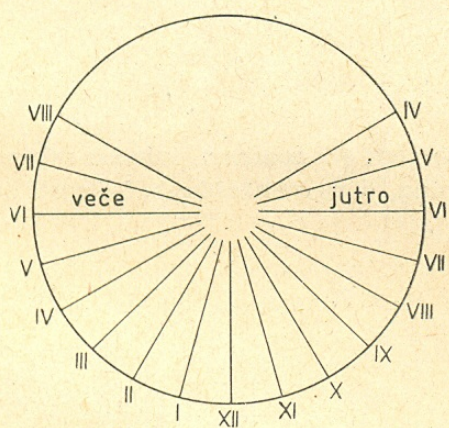
podijelimo s kvadratom vremena 7 njihaja, čime dobivamo pola akceleracije (u sek^2). Točniju vrijednost bismo dobili, kad bismo redom $s_1, s_2, \dots, s_7$ podijelili s pripadnim kvadratima vremena (u sekundama) pa uzeli srednju vrijednost tih kvocijenata; pomnožimo li je sa 2, dobijemo srednju vrijednost akceleracije jednoliko-ubrzanog gibanja kuglice niz našu kosinu.

Napomena. Trag (čađavi) kuglice na kraju eksperimenta lako izbrišemo mekanim gumenim brisalom. Daska mora biti glatka, ali ne polirana.

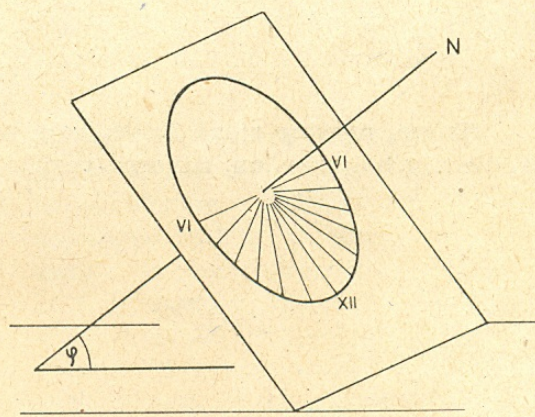
A. Kurelec, Zagreb

Kako ću napraviti sunčani sat?

S jedne i s druge strane ravne pravokutne ploče (iz drveta ili čvrstog kartona) nacrtamo kružnice i u njima polumjere tako, da po dva susjedna polumjera zatvaraju kut od 15° (sl. 1.). Dimenzije ploče neka su takve da promjer kružnice bude bar oko 40 cm. Kroz središte kružnice, okomito na ploču, utaknemo čvrstu tanku



Sl. 1.

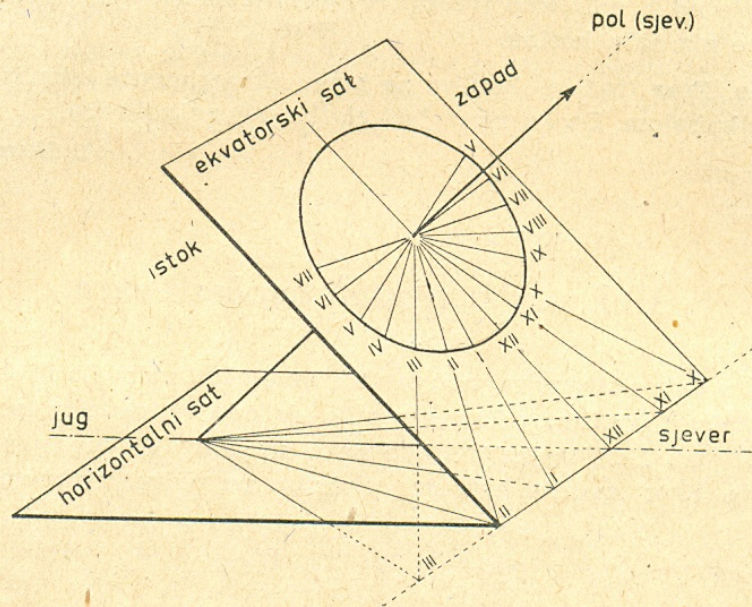


Sl. 2.

šipku. Time je sunčani sat gotov; treba ga još samo prikladno postaviti. A to ćemo učiniti tako (sl. 2.), da šipku stavimo u smjer sjever-jug i priklonimo je prema horizontalnoj ravnini pod kutom φ , koji je jednak geografskoj širini našeg mjesta. (Geografske širine glavnijih mjesta nalazimo obično navedene pri kraju logaritamskih tablica). Priklon reguliramo pomicanjem šipke kroz dasku. Ako smo postigli željeni priklon, bit će šipka uperena prema nebeskom polu, a ravnina ploče ležat će u ravnini nebeskog ekvatora.

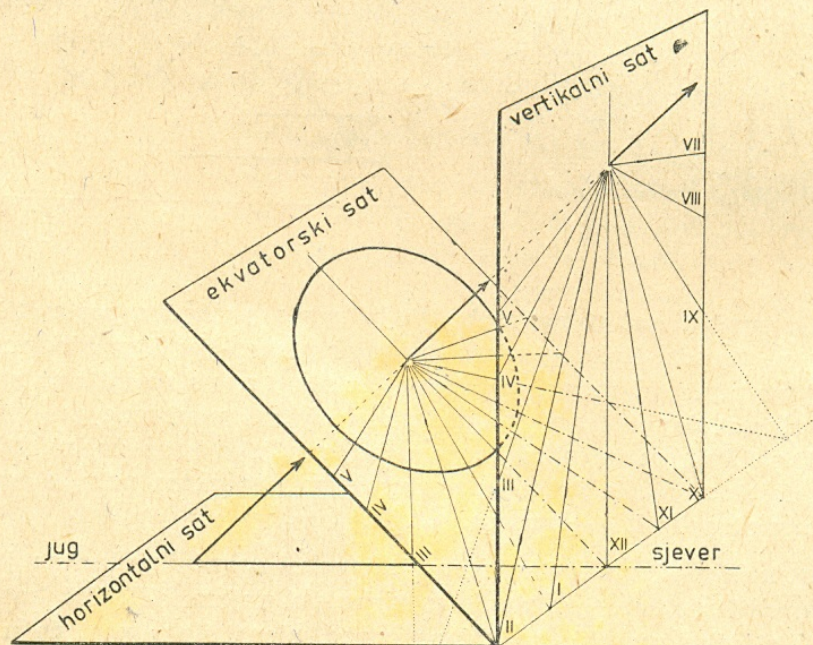
U podne, kad se Sunce nalazi u meridijanskoj ravnini, točno na jugu, past će sjena šipke u smjer sjever-jug, dakle u smjer polumjera XII. Sat kasnije, budući da se Sunce prividno pomaklo za 15° na zapad, sjena šipke past će u polumjer I (1 sat poslije podne!); dva sata kasnije past će sjena u smjer polumjera II (2 sata poslije podne) i t. d. Za vrijeme proljeća i ljeta, kad se Sunce nalazi iznad ravnine nebeskog ekvatora, sjena šipke past će na gornju stranu naše ploče, a za vrijeme jeseni i zime — na donju stranu ploče. Opisani sat zove se ekvatorijalni sunčani sat, jer mu ravnina ploče leži u ravnini nebeskog ekvatora.

Ovaj ekvatorijalni sunčani sat može poslužiti za konstrukciju t. zv. horizontalnog, odnosno vertikalnog sunčanog sata, t. j. za konstrukciju crta, koje će pokazivati koliko je sati (satne crte).



Sl. 3.

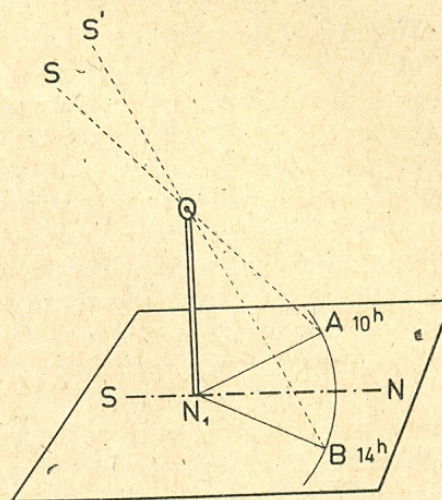
Naime, ravnine sjenâ šipke, koje prolaze šipkom i odnosnom satnom crtom, presijecaju horizontalnu, odnosno vertikalnu ravninu, u ravnim crtama, koje ozna-



Sl. 4.

čuju satne crte na horizontalnom, odnosno vertikalnom sunčanom satu. Slike 3. i 4. to jasno pokazuju.

Napomena. Smjer sjever-jug možemo približno odrediti ili prema polarnoj zvijezdi ili prema deklinatornoj magnetskoj igli, ako nam je poznata deklinacija našeg mjesta. Ali taj smjer možemo odrediti i na način kako to pokazuje slika 5. Na horizontalnu ravnu dasku ili podlogu, stavimo vertikalni štapić (oko 50 cm visok), i na njemu učvrstimo mali karton s otvorom, kroz koji prolaze sunčane zrake i čine, pri kraju sjene štapa, svijetlu mrlju. Pogledamo dokle dopire sjena štapa, točnije: svijetla mrlja, na pr. u 10 sati prije podne, pa iz nožišta N_1 štapa opišemo kružni luk polumjerom, koji je jednak dužini te sjene (N_1A). U dva sata poslije podne opet će se mrlja na vrhu sjene štapa nalaziti na kružnom luku, uzmimo u točki B . Spojimo N_1 sa B . Simetrala kuta, što ga čine N_1A i N_1B daje smjer sjever-jug.



Sl. 5.

Sunčani satovi daju nam »pravo« sunčano vrijeme, na mjestu na kojem su postavljeni. Da bismo dobili srednje (ili građansko) sunčano vrijeme, kojim se upravo služimo, morali bismo izvršiti ispravke uz pomoć t. zv. jednačbe vremena.

ZANIMLJIVOSTI I RAZNO

Povodom stogodišnjice smrti Nikolaja I. Lobačevskoga

Ove godine navršilo se sto godina od smrti slavnog ruskog matematičara N. I. Lobačevskoga, koji je svojim radovima prvi postavio čvrste temelje neeuclid-skoj geometriji, dao nove i revolucionarne poglede na aksiomatiku geometrije i time omogućio geometriji svestran i nezadrživ daljnji napredak. Pored njega zaslužni su za razvoj neeuclid-skih geometrija mladi mađarski matematičar J. Bolyai, njemački matematičar B. Riemann i drugi. Razvojem neeuclid-skih geometrija dobiva teoretska fizika nova matematička sredstva za tumačenje složenih fizičkih pojava, ona može dublje ulaziti u probleme u vezi s gibanjem, u vezi s izgradnjom materije i revolucionarnim poimanjem cjelokupnog kozmosa.

N. I. Lobačevski rođen je 1792. g. u Nižnjem Novgorodu. Kad je navršio 5 godina života izgubi oca, a njegova

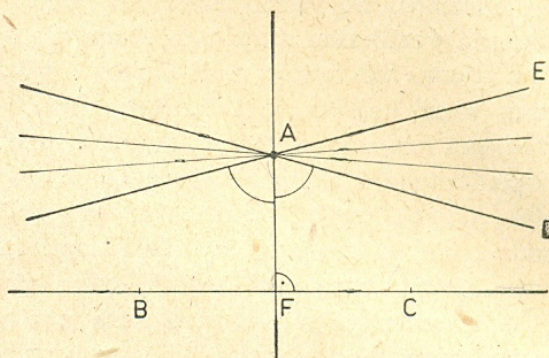
majka s troje djece preseli se u Kazan. Kako se već u srednjoj školi naročito isticao svojom inteligencijom i znanjem, upisao se 1807. g. na univerzitet u Kazanu i studira matematiku i fiziku. Već 1811. g. postaje »magister« ili kako se danas kaže asistent, a 1816. g. već je izvanredni profesor. Od 1820. do 1827. g. vrši dužnost dekana matematičko-fizičkog odjela, a od 1827. g. dalje šest puta redom biran je za rektora univerziteta. Premda opterećen mnogim dužnostima, kao predavač i kao organizator naučnog rada na univerzitetu, morao se neprekidno boriti s reakcionarnom i zaostalom sredinom, koja mu je mnogo puta zadavala velikih briga i poteškoća. Ali Lobačevski ne sustaje, on neumorno radi, predaje, piše udžbenike, stvara naučna djela koja su od presudnog značenja za razvoj geometrije i matematike uopće. Raspravom »Kratko izlaganje osnova geometrije sa strogim dokazom poučka o paralelama«, koju je Lobačevski čitao na sjednici matematičkog odjela kazanskog univerziteta 23. veljače 1826. g., polaže temelje neeuclid-skoj geometriji i

taj se dan može smatrati rođenjem ne-euklidske geometrije. God. 1829. štampa taj referat pod naslovom »O načelima geometrije« u kazanskom vjesniku. God. 1840. štampa u Berlinu na njemačkom jeziku rad »Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien«, a 1855. g. štampa u Kazanu svoj posljednji rad »Pangeometrija«. Po svojem karakteru i dalekosežnim posljedicama djelo Lobačevskoga znači revolucionarni preokret u tretiranju geometrijskih činjenica, zato su ga s pravom uspoređivali s Kopernikom i Galilejem.

A što je zapravo uradio Lobačevski? On je proučavao osnovne postavke geometrije Euklida i pokazao da je moguće izgraditi i takvu geometriju, koja će se bitno razlikovati od Euklidove, ali će unatoč tome biti logički neprotuslovna. Peti postulat u Euklidovim »Elementima« bio je u centru pažnje svih matematičara poslije Euklida. Dok su drugi postulati, koji su nabrojani u 1. knjizi Euklidovih »Elemenata« po izgledu jednostavni, prihvatljivi i lako uočljivi da se ne mogu dalje raščlaniti, dotle 5. postulat, koji se nalazi među njima, ima složen izgled: »Ako se dva pravca dovoljno produžena presjeku trećim pravcem, koji s njima na istoj strani zatvara unutrašnje kutove, koji su zajedno manji od dva prava, onda se ti pravci moraju sjeći na onoj strani, na kojoj je zbroj tih unutrašnjih kutova manji od dva prava«. Već su učenici Euklida došli na pomisao, nije li možda taj 5. postulat zapravo poučak, koji se može dokazati na temelju ostalih postulata i već dokazanih činjenica.

Tako je nastao problem, koji je skoro 2000 godina čekao na svoje rješenje. Poznato je, da se pomoću 5. postulata može dokazati poučak: »Točkom A izvan pravca BC može se u ravnini ABC povući jedan i samo jedan pravac, koji ne siječe pravac BC«. Lobačevski u osnove svojih istraživanja uvodi potpuno suprotan postulat: »Točkom A izvan pravca BC u ravnini ABC ide ne jedan, nego beskonačno mnogo pravaca koji ne si-

jeku pravac BC. Ti pravci leže između dva granična pravca AD i AE, koji ne sijeku pravac BC, a čine s pravcem $AF \perp BC$ jednake kutove (koji se zovu



kutovi paralelnosti). Kad je Lobačevski učinio taj korak, otvorio je time vrata prema dalekim i neistraženim područjima geometrije, koja je kasnije dobro ispitao i upoznao. Taj mu je korak omogućio, da savlada problem, koji je čekao na rješenje skoro 2 milenija; taj ga je korak doveo do otkrića neeuklidskih geometrija.

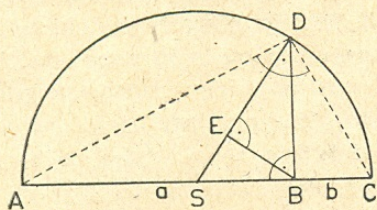
Nažalost dalekosežna otkrića Lobačevskoga nisu shvatili njegovi savremenici u domovini, pa je morao u nekoliko navrata doživjeti od njih teška razočaranja. Kad je umro, na grobu je održan govor, a kazanske novine javljale su o njegovoj smrti, ali o njegovome životnom djelu nije tu bilo ni spomena. Kratko vrijeme poslije njegove smrti uočili su i njegovi nasljednici a i čitav naučni svijet dalekosežnost i revolucionarnu snagu njegovih djela. I danas, poslije sto godina od njegove smrti cio naučni svijet sjeća se s dužnim poštovanjem i zahvalnošću velikog i zaslužnog matematičara.

L.-R-ć

Još jedan dokaz relacije među aritmetičkom, geometrijskom i harmonijskom sredinom

Neka su a i b dva pozitivna realna broja, i neka je $a > b$. U slici je mjerni broj dužine $AB=a$, a dužine $BC=b$. Nad dužinom $AC=a+b$ kao promjerom nacrtana je polukružnica i povučena njezina polutetiva $BD \perp AC$. Mjerni

broj polumjera $SD = \frac{a+b}{2}$, t. j. *aritmetičkoj sredini* brojeva a i b . U pravokutnom trokutu ADC je mjerni broj visine $BD = \sqrt{ab}$, t. j. *geometrijskoj sredini* brojeva a i b . Ako je DE



projekcija katete BD na hipotenuzu SD pravokutnog trokuta DBS , onda je $DE \cdot SD = BD^2$ ili $DE = \frac{BD^2}{SD}$, t. j. mjerni je broj dužine $DE = \frac{2ab}{a+b}$, a to je *harmonijska sredina* brojeva a i b .

Kako je u svakom pravokutnom trokutu hipotenuza veća od katete, izlazi, da je

$$SD > BD > DE, \text{ t. j.}$$

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$$

uz uvjet $a \geq b$.

S. Šk-a

Ispravak. U 3. broju našeg lista g. VI. u članku »O jednoj teoremi mat. sredina« trebalo je dokazati nejednakost $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$. To izlazi neposredno, ako se očitoj nejednakosti $(a-b)^2 > 0$ doda lijevo i desno $2ab$, dok s pomoću relacije, koja je ondje navedena,

$$\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n} \geq \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right)^2$$

to može, ali ne bi moralo izlaziti.

Ur.

Nejednolikost Zemljine rotacije

Zemlja se ne okreće oko svoje osi sasvim jednoliko. Razlikujemo tri odstupanja od njene jednolike rotacije: 1. sekularna ili progresivna varijacija Zemljine brzine rotacije; 2. sezonske varijacije i 3. nepravilne varijacije brzine rotacije.

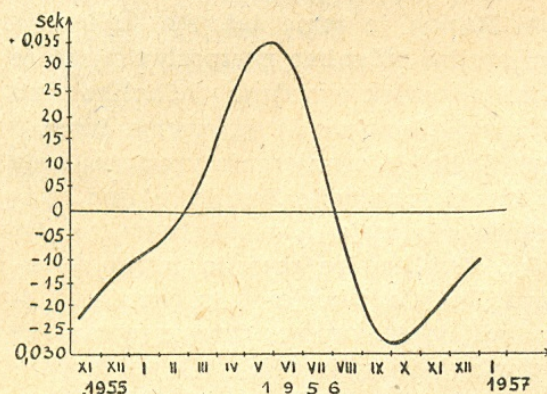
Sekularna ili progresivna varijacija Zemljine brzine rotacije naslućivala se

već odavna, premda se nikakvim satovima nije moglo konstatirati bilo kakvo odstupanje od jednolike vrtnje Zemljine. Naime, ispitivanjem položaja našeg Mjeseca na njegovu putu oko Zemlje primijetilo se već davno, da se teorijski proračunati položaji nisu sasvim podudarali sa stvarnim Mjesečevim pozicijama. Razlog je tome taj, što je teorija pri svojim računima pretpostavila, da se Zemlja uvijek savršeno jednoliko vrti oko svoje osi, pa da je, prema tome, i naša jedinica za mjerenje vremena, koja se izvodi iz rotacije Zemlje, uvijek i savršeno nepromjenljiva. Međutim, to nije tako. Zemljina se rotacija trajno usporava. Doduše, razmjerno izvanredno malo, ali ipak trajno. Ovo usporavanje uspjelo je u najnovije vrijeme konstatirati i sa izvanredno preciznim modernim satovima, kvarc-satovima i t. zv. atomskim satovima. Uzrok tom usporavanju je trenje valova plime i oseke o morsko dno i u tjesnacima. Zbog tog Zemljinog usporavanja produljuje se i trajanje dana pa i sekunde, i odatle prividno ubrzavanje Mjesečevog gibanja. S druge strane, budući da je time sekunda postala promjenljiva (neprekidno postaje dulja), ukazala se, prije svega u astronomiji potreba, da se uvede nova vremenska jedinica. O svemu tome pisali smo već u našem listu (Mat.-fiz. list, g. V., br. 1., str. 27.).*

Ovdje bismo se osvrnuli na druge dvije varijacije brzine Zemljine rotacije. I one su ustanovljene izvanredno preciznim satovima. Ustanovljeno je da Zemlja, razmjerno prema svojoj prosječnoj brzini vrtnje, sporije rotira u proljeće, a brže u jesen. (Te sezonske varijacije brzine ne ponavljaju se sasvim točno u istoj veličini iz godine u godinu, ali su nepravilnosti izvanredno male). Na pri-

* Na posljednjem zasjedanju Internacionalne astronomske unije u Dublinu (29. VIII. — 5. IX. 1955.) prihvaćena je nova definicija vremenske jedinice, koja je nazvana sekunda (a ne »hronija« kako se isprva pretpostavilo). Ta definicija glasi: 1 sekunda je 31 556 925,975 dio trajanja tropske godine za epohu 1900,0. Kako vidimo, u definiciji je uzeta tropska godina, a ne zvezdana, kako je to bio potvrdio raniji kongres Unije u Rimu, god. 1952.

loženom crtežu vidimo predviđene (izračunate) varijacije brzine Zemljine vrtnje u toku godine 1956. Odatle se vidi, da u mjesecu svibnju (maju) Zemlja zakašnjava tako, da dan traje za 0,0352 sekunde dulje, nego dan pri srednjoj brzini rotacije (0), a da je u mjesecu listo-



padu (oktobru) dan kraći za 0,0281 sekunde od prosječne duljine dana. Zorno predloženo: u prvom slučaju neka točka na ekvatoru kasni 16 m u danu, a u drugom stiže 13 m prerano prema gibanju srednjom brzinom vrtnje.

Razlog tim sezonskim varijacijama Zemljine brzine rotacije su premještanja velikih masa uzduha naše atmosfere. Računski rezultati, koji su uzeli u obzir promjenu temperature atmosfere i utjecaj raznih njenih slojeva na tu pojavu, slažu se dobro s opažanjima, tako, da možemo zaključiti, da su uzrok sezonskim varijacijama Zemljine brzine vrtnje doista gibanja (cirkulacije) atmosfere. Kako su i ta gibanja, kao i svaka meteorološka pojava, iz godine u godinu promjenljiva, mijenjaju se ponešto i sezonske varijacije iz godine u godinu, kao što smo to već spomenuli.

Što se tiče nepravilnih ili slučajnih varijacija brzine Zemljine vrtnje, njih proizvode promjene u unutrašnjosti Zemlje i to, kako misle neki učenjaci, promjene u jednom sloju, što se nalazi iznad zone, koja je izvor jakim i dubokim Zemljinim potresima. Taj bi se sloj, po shvaćanju učenjakâ, nalazio u stanju, koje je vrlo blizu kritičnom stanju

tako, da i razmjerno slabe promjene okolnosti u unutrašnjosti Zemlje, mogu u znatnoj mjeri izmijeniti volumen tog sloja. To pak dovodi do izmjene u rasporedu cjelokupnih Zemljinih masa oko njene osi, t. j. do promjena momenta tromosti Zemlje, zbog čega dolazi do momentanog ubrzavanja ili usporavanja Zemljine vrtnje. Jedan ruski učenjak je izračunao, da pri promjeni od svega 20 cm debljine sloja, debelog 9 metra, nastaju tolike varijacije u brzini rotacije našeg planeta, kao što su najveći opažani slučajevi, pod pretpostavkom, da taj sloj leži na zoni jakih Zemljinih potresa.

A. K.

Još o Pitagorinim brojevima

Pitagorini su brojevi, kako znamo, prirodni brojevi x, y, z , koji zadovoljavaju relaciju $x^2 + y^2 = z^2$. U zadatku 214. broj 1 god. VII. našeg lista dokazano je ovo svojstvo Pitagorinih brojeva: ako su brojevi x, y, z , koji nemaju zajedničke mjere, Pitagorini brojevi, to je 1) jedan od brojeva x, y mnogokratnik od 3, 2) jedan od brojeva x, y mnogokratnik od 4, 2) jedan od brojeva x, y, z mnogokratnik od 5.

Ta su svojstva ondje dokazana razmatranjem same jednakosti $x^2 + y^2 = z^2$. No ta se svojstva, kako ćemo ovdje pokazati, dađu dokazati također razmatranjem općeg rješenja; ono glasi, ako apstrahiramo od faktora proporcionalnosti; $x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$, $z = m^2 + n^2$. Brojevi m i n su relativno prosti; osim toga jedan od njih je paran, drugi neparan. Iz izraza za y izlazi odmah, da je y djeljivo s 4; ako je jedan od brojeva m, n djeljiv s 3, y je djeljiv s 3, ako nije može biti ovo: ili m i n daju podijeljeni s 3 ostatak 1 ili ostatak 2; u oba ta slučaja $m - n$ je djeljivo s 3, pa je $x^2 = (m - n)(m + n)$ djeljivo s 3; može biti i to, da jedan od brojeva m i n daje podijeljen s 3 ostatak 1, drugi ostatak 2; u tom je slučaju $m + n$ djeljivo s 3, pa je opet x djeljivo s 3.

S obzirom na broj 5 mogući su ostaci 0, 1, 2, 3, 4 ili 0, ± 1 , ± 2 (3 odgovara ostatku -2 , 4 ostatku -1); y je djeljivo s 5, ako je jedan od brojeva m i n djeljiv s 5; x je djeljivo s 5, ako svaki od brojeva m i n daju ostatak ili $+1$ ili -1 ili $+2$ ili -2 ili jedan $+1$, drugi -1 , jedan $+2$, drugi -2 . U svakom od tih slučajeva $m^2 - n^2$ je djeljivo s 5. Ako pak jedan od brojeva m i n daje ostatak ± 1 , drugi ± 2 , $m^2 + n^2$ t. j. z^2 dakle i z je djeljivo s 5.

Iz svega izlazi, da je umnožak x , y , z uvijek djeljiv sa 60. Eto nekoliko primjera Pitagorinih brojeva: 5, 12, 13; 8, 15, 17; 7, 24, 25; 28, 45, 53; 16, 63, 65; 33, 56, 65 i t. d. Može se dogoditi, da je jedan od Pitagorinih brojeva djeljiv u isti čas i sa 3, 4, 5. Na pr. 60, 11, 61; 120, 119, 169; 180, 19, 181; 240, 16, 289.

Ova svojstva Pitagorinih brojeva spominje Bernard Frenicle de Bessy (I. polovina 18. vijeka). S. Š.

NOVE KNJIGE

Polya G.

Kako ću riješiti matematički zadatak?*

Autor ove knjige bavi se već preko 20 godina t. zv. heuristikom, t. j. proučavanjem putova, koji vode do otkrića, analiziranjem najčešćih pitanja i postupaka pri rješavanju nekog zadatka. U predgovoru kaže da »se sjeća vremena, kad je sam bio student... Pozorno je slušao predavanja, čitao knjige i pokušavao da shvati prikazana rješenja i činjenice; no bilo je jedno pitanje, koje ga je neprestano uznemirivalo: Jest, rješenje je tu, čini se da je ispravno, no kako je moguće naći takvo rješenje? Jest, ovaj eksperiment čini se da uspijeva, činjenice su tu, no kako ljudi mogu

otkriti takve činjenice? A kako bih ja sam mogao nešto takva pronaći ili otkriti?... Njegova nastojanja, da ne samo shvati rješenje ovog ili onog problema, već i motive i postupke u rješavanju, pa da to onda objasni drugima, dovela su ga najzad do toga, da napiše ovu knjigu. On se nada, da će ona koristiti nastavnicima, koji žele kod svojih učenika razvijati vještinu u rješavanju zadataka, i učenicima, koji nastoje razviti svoje vlastite sposobnosti.«

Odmah valja naglasiti da u knjizi ne ćemo naići na neki »kamen mudraca« niti saznati za neki čarobni univerzalni recept, po kome bismo mogli doći do rješenja bez ikakvog vlastitog umnog napora. Ipak, rješavajući neki zadatak (koji ne mora biti baš matematički, iako se o njem u knjizi najviše govori), nailazimo neprestano na neka ista pitanja i na neke tipične postupke, na primjer: Što je nepoznato? Što je zadano? Kako glasi uvjet? Nacrtaj sliku! Uvedi zgodne oznake! Znaš li neki srodan zadatak? Vрати se na definicije! Da li si iskoristio sve zadano? Kontroliraj svaki korak! Možeš li rezultat izvesti drugačije? Sva pitanja i preporuke, koje vode do rješenja, sistematski su poredane onim redom, kako se najčešće pojavljuju pri rješavanju zadatka, tako da tabela (odštampana na koricama) ističe 4 faze u rješavanju, t. j. razumijevanje zadatka, stvaranje plana, izvršavanje plana i osvrt.

U prvom dijelu knjige (pod naslovom »U učionici« prikazuje autor na nekoliko konkretnih primjera, kako se pitanja i preporuke iz tabele pravilno upotrebljavaju. U drugom dijelu (»Kako rješavati zadatak?«) dan je jedan kratki dijalog između nastavnika i učenika. U trećem, najopširnijem dijelu (»Mali heuristički leksikon«) građa tabele detaljno je razrađena u 67 članaka, abecedno poredanih. Evo naslova nekih članaka: Analogija, Budući matematičar, Definicija, Indukcija i potpuna indukcija (vidi M.-f. list 1955.-56., br. 2!), Mudrost u poslovi-

* Georg Polya je kalifornijski sveučilišni profesor. Knjigu *Kako ću riješiti matematički zadatak* preveo je sa sedmog američkog izdanja prof. Milan Krajnović, a izdala *Školska knjiga* u Zagrebu, 1956. (Str. XVI+200; cijena 200 din)

cama, Postavljanje jednačbi, Praktični zadaci, Provjeravanje razmatranjem dimenzija, Slike, Tradicionalni profesor matematike, Zagonetke.

Knjiga je pisana pristupačnim stilom, no mjestimično dosta sažeto, i svakako je ne valja čitati prebrzo. Primjeri iz srednjoškolskog gradiva sretno su odbačeni, a zagonetke i poslovice pojačavaju svježinu teksta. Neke strane riječi prevodilac očito nije mogao kratko i posve vjerno prevesti na naš jezik, pa ih je o taviio, smatrajući da se srednjoškolci trebaju navikavati i na upotrebu rječnika stranih riječi.

Ovaj prijevod potpuno odgovara današnjim reformnim težnjama u našem školstvu, i svakako da će pridonijeti razvoju samostalnog rada i istraživačkog duha učenika. Preporuča se za upotrebu u dopunskom radu učenika (seminari, naučne grupe i t. sl.). Knjiga je solidno i ukusno opremljena i treba da uđe ne samo u školske biblioteke, već i u lične biblioteke onih učenika, koji se živele interesiraju za matematiku, a naročito onih, kojima će matematika trebati u kasnijem njihovom studiju. N. M.

»Zemlja i svemir«. Izišao je 1. broj časopisa »Zemlja i svemir« s ovim sadržajem: Wittasek, Uvodna riječ. — Marinović V., Mars — najbliži Zemlji. — Nigrović, Život u svemiru. — Novosti i zanimljivosti. — Časopis ima 24. litografirane stranice. Cijena je broju 30 dinara. Naručuje se u Hrv. prirodoslovnom društvu Zagreb, Ilica 16.

ZADACI I RJEŠENJA

A) Zadaci iz matematike

228. Тачка M описује полукруг пречника $AB=4$. Нека је P пројекција тачке M на AB ; ставимо $AM=x$.

а) Разлику $y=AM-AP$ изразити као функцију променљиве x затим конструисати график те функције кад тачка M опише дати полукруг.

б) Права $y=\lambda$, где је λ променљив параметар, сече праву из 1. а) у тачкама чије

су апсцисе x_1 и x_2 . Дискутовати број и природу тих пресека за разне вредности λ .

в) Показати да тачке M_1 и M_2 на полукругу, којима одговарају растојања x_1 и x_2 од тачке A , леже на правој паралелној са AB ако је $x_1^2+x_2^2=16$. Одредити у том случају положај праве $y=\lambda$.

229. Решити квадратну неједначину

$$-\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2 > x(x-1).$$

а) Проверити добијено решење служећи се графицима функција

$$y_1 = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2; \quad y_2 = x(x-1).$$

б) Означимо са a и b корене једначине $y_1=0$, а са c и d корене једначине $y_2=0$.

Одредити два броја x_1 и x_2 који истовремено задовољавају једначине

$$\begin{aligned} 2x_1x_2 - (a+b)(x_1+x_2) + 2ab &= 0 \\ 2x_1x_2 - (c+d)(x_1+x_2) + 2cd &= 0. \end{aligned}$$

230.* Дokaжи: ако је $x^3+3ax^2+3bx+c$ дјелјиво с $x^2+2ax+b$, први је полином потпуни куб, други је потпуни квадрат.

231.* Израчунај без кубирања или растављања у факторе:

$$\begin{aligned} (a+b+c)^3 - (b+c-a)^3 - \\ - (c+a-b)^3 - (a+b-c)^3. \end{aligned}$$

Упута: узми у обзир, да се lijeва страна поништава за $a=0$, $b=0$, $c=0$.

Види на пр. задатак бр. 125, напомена.

232. Дokaжи: ако су a , b , c три различита броја или највише 2 од њих могу бити између себе и једнака, тад је

$$\alpha) \quad a^2+b^2+c^2 > ab+ac+bc.$$

Ако су пак a , b , c мјерни бројеви странца трокута, тад је увијек

$$\beta) \quad a^2+b^2+c^2 < 2ab+2ac+2bc.$$

233.* Дokaжи: помножимо ли која му драго 4 цијела узастопна броја и добивеном продукту додамо 1, добивамо увијек потпуни квадрат.

234. У кружни исјецак OAB средишњег кута 60° и полумјера r упиши правокутник, кому једна страница лежи на OA и кому је дијagonalа једнака d . Дискусија.

Упута: Ако је $CDEF$ тражени правокутник уписан у кружни исјецак и тачка E на луку AB , $\sphericalangle AOE$ означи с x .

235.* Дokaжи: умножак двaju фактора, од којих је сваки једнак зbroју двaju квадрата, може се приказати такодер као зbroј 2 квадрата и то на два начина.

236.** Izračunaj

$$\alpha) \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{a^3 + b^3 - a^2b - ab^2} - \frac{ab^2 + b^3 - a^3 - a^2b}{a^4 - b^4 - 2a^3b + 2ab^3}$$

$$\beta) \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{x^4 + x^2y^2 + y^4} \cdot \frac{x^6 - y^6}{x^4 + x^2y^2} : \left(1 - \frac{y^4}{x^4}\right)$$

237. Neka se izračuna stranica $2x$ baze pravilne šesterostrane piramide, ako joj je po-bočni brid jednak b i oplošje je $O = 6k^2$!

238. Zadan je polukrug središta O , promjera AB ; polumjer OD okomit je na AB . Točkom A povuče se tetiva AT , te se spoji A i D i T i D . Neka se izračuna kut $BAT = x$ tako, da trokut ATD ima zadanu površinu k^2 . Razlikuj 2 slučaja: α) T se nalazi između B i D , β) T se nalazi između A i D . Diskusija.

239. Zadane su jednadžbe dviju kružnica: $x^2 + y^2 + 9x - 4y = 18$ i $x^2 + y^2 - 10x - 8y = 24$. One se sijeku u točkama A i B . Neka se točkom A povuče pravac s tako, da se tetiva AC prve kružnice odnosi prema tetivi AD druge kružnice kao $3:2$.

B) Zadaci iz fizike*

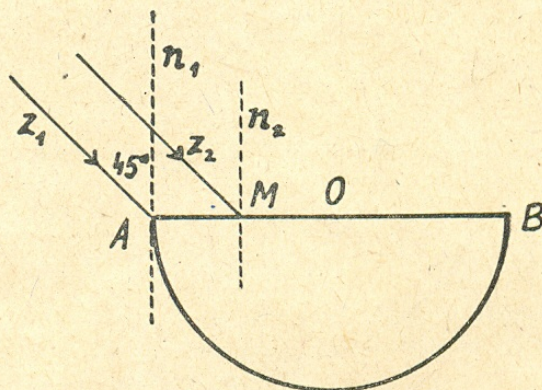
126.* Dva radnika prenose s pomoću motke dugačke $2m$, a teške 4 kg ,* željeznu blagajnu tešku 80 kg .* Pita se 1. koliki teret nosi svaki od njih, ako je blagajna smještena tako, da svojom težinom djeluje u središtu motke; 2. koliko radnju izvrši prvi radnik, ako ruku s motkom dignu 15 cm visoko; 3. ako se blagajna pritom pomakla na motki za 20 cm prema drugom radniku, koliki će teret sada otpasti na prvog, a koliko na drugog radnika; 4. konačno, jedan radnik gura sam blagajnu, stavljen u kolica, 20 kg * teška, uz kosinu, koja je 20 m duga, a 4 m visoka; koliko je radnju pritom izvršio; kolikom je prosječnom snagom pritom djelovao, ako je radnja trajala dvije minute? (Trenje zanemarujemo).

127. Čelični valjak, visok 20 cm , gustoće $7,8$, uronjen je vertikalno u živu; ispod njega, neposredno na njegovom dnu, učvršćen je valjak iz platine, gustoće $21,12$, jednake osnovke kao i čelični valjak, tako, da sustav pliva u ver-

tikalnom položaju na taj način, da gornja osnovka čeličnog valjka viri 3 cm visoko iznad površine žive. Kolika je visina platinenog valjka?

128. U širokoj cijevi, dugačkoj $1,2\text{ m}$ nalazi se na dnu 4 kg olovne sačme. Okretanjem cijevi uvijek u vertikalni položaj, pustimo da sačma 40 puta uzastopno padne vertikalno u cijevi. Pri tom se mjerenjem našlo, da se temperatura sačme povisila za $3,8^\circ\text{C}$. Pita se koliki je mehanički ekvivalent topline, prema rezultatu ovog eksperimenta, ako je specifična toplota olova $0,03$?

129. Plosnata staklena poluvaljkasta ploča ima indeks loma $n = \sqrt{2}$. Ako na nju pustimo zraku svjetlosti, u ravnini presjeka okomitog na os valjka, a pod kutom upadanja $\alpha = 45^\circ$, pita se 1. ako zraka (z_1) padne na rub ploče (v. sliku)



u točku A , kakva će biti njena putanja kroz staklenu ploču i u kojoj će točki ploče izaći iz nje, te u kom smjeru; 2. ako zraka (z_2) padne na bilo koje drugo mjesto M , gdje bi trebala ležati ta točka M između O i A , pa da zraka izađe iz ploče u smjeru, koji je paralelan upadajućoj zruci?

130. Turbina, u koju svake sekunde pada $1,5\text{ m}^3$ vode s visine od 200 m , tjera generator izmjenične struje. Ukupni stupanj djelovanja je tu 70% . Dobi-vena električna energija transformira se u transformatoru, koji ima stupanj djelovanja 95% , na visoku napetost za dalekovod. U dalekovodu se gubi daljih 10% energije. Koliko se snage, izražene

Vidi također: Vježbe u rješavanju zadataka iz fizike na str. 85. ovog časopisa!

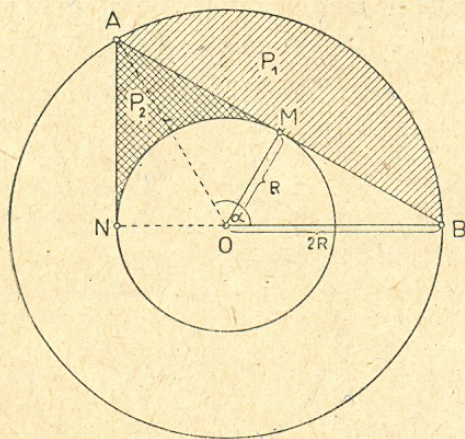
у kilokalorijama/sek, može dobiti sa polova transformatora (jednako onom prvome), priključenog na drugom kraju dalekovoda?

C) Rješenja iz matematike

216. Дата су два концентрична круга са центром O и полупречницима R и $2R$. Дирка повучена у произвољној тачки M унутр. круга сече спољ. круг у тачкама A и B .

а) Израчунати дужину тетиве AB и површину P_1 отсека спољашњег круга, ограниченог тетивом AB .

б) Из A повучена је дирка AN , унутрашњег круга, где је N додирна тачка. Израчунати P_2 површину ограничену диркама AM и AN и луком MN унутрашњег круга.



с) Показати да је $P_1 + P_2 = P$, где је P површина унутрашњег круга.

$$a) \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 4R^2 - R^2$$

$$AB = 2R\sqrt{3}$$

$$P_1 = \frac{2R\pi\alpha}{180} \cdot \frac{2R}{2} - \frac{2R\sqrt{3} \cdot R}{2}$$

$$P_1 = \frac{R^2\pi\alpha}{90} - R^2\sqrt{3}$$

$$b) \overline{AN}^2 = 4R^2 - R^2 \quad P_2 = 2 \cdot \frac{R\sqrt{3} \cdot R}{2} -$$

$$- \frac{R\pi\alpha}{180} \cdot \frac{R}{2}, \quad P_2 = R^2\sqrt{3} - \frac{R^2\pi\alpha}{360}$$

$$c) P = P_1 + P_2 = \frac{R^2\pi\alpha}{90} - \frac{R^2\pi\alpha}{360} = R^2\pi \cdot \frac{\alpha}{120}$$

Како је у троуглу OBM , $OB = 2OM$, то је $\frac{\alpha}{2} = 60^\circ$, $\alpha = 120^\circ$ те је $P = R^2\pi$.

Борђевић Живојин, уч. VIII р. г. Прокупље

217. Дата је квадратна једначина

$$f(x) = x^2 + px + q = 0 \quad (1)$$

чији су корени x_1 и x_2

а) Који услов задовољавају коефицијенти p и q ако је $x_1 - x_2 = m$ где је m дат број? Изразити, у том случају, минимум тринома $f(x)$, као функцију од величине m .

б) Из претпоставке

$$x_1 - x_2 = 1 \quad \text{и} \quad p + q = -1$$

решијти једначину (1). Добивене резултате проверити на графику функције $y = f(x)$.

а) Имамо да је:

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{I}$$

$$x_1 x_2 = q, \quad \text{II.}$$

$$x_1 - x_2 = m. \quad \text{III.}$$

Ако квадрирамо I. и III. а II. помножимо с (-4) па саберемо I. и II. имаћемо:

$$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = p^2 - 4q,$$

$$(x_1 - x_2)^2 = m^2.$$

Леве стране су им једнаке па ће и десне бити

$$p^2 - 4q = m^2 \quad (2)$$

што претставља услов између p и q . Минимум је тада из

$$y_T = \frac{1}{4}(4q - p^2) \text{ једнак } y_T = -\frac{1}{4}m^2.$$

б) Тада је $m^2 = 1$ а вредности за p и q добијамо из следећих једначина

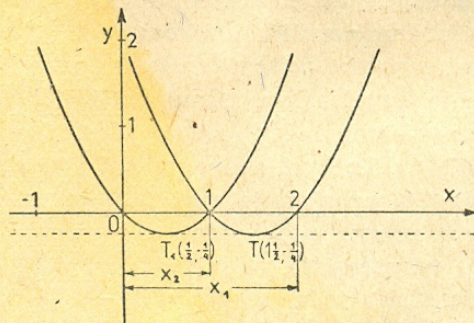
$$p^2 - 4q = 1,$$

$$p + q = -1,$$

Одавде излази $p_1 = -3$, $q_1 = 2$, $p_2 = -1$ и $q_2 = 0$ па једначина (1) гласи

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 - x = 0.$$

Корене одмах налазимо, прве су $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, друге $x_1' = 1$, $x_2' = 0$.



Мудрински Војислав, уч. 7d р. г.
»Св. Марковић«, Нови Сад.

218. Дат је трапез $ABCD$; са правим угловима у теменима A и D . Ставимо

$$AD = h, AB = b, CD = b_1, BC = a.$$

Који однос постоји међу странама датог трапеза?

а) Претпоставимо да страна BC додирује круг, са средиштем O описан над AD као пречником. Показати у том случају:

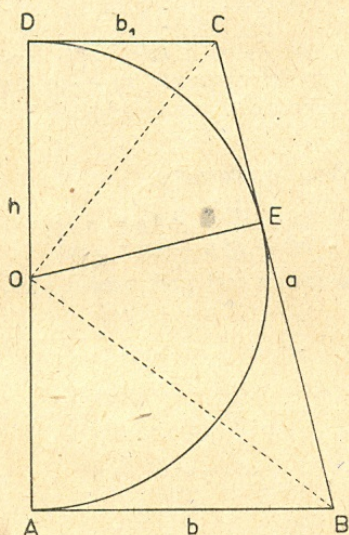
1. $a = b + b_1$ 2. $DOBC$ је правоугли 3. површина трапеза се може изразити као функција само од b и b_1 .

Између страна трапеза постоји однос:

$$a^2 = h^2 + (b - b_1)^2 \quad (1)$$

а) 1. Тангенте повучене из исте тачке на круг једнаке су па је:

$$BE = BA \text{ и } CE = CD$$



саберимо ли их, излази:

$$BE + CE = BA + CD$$

или

$$a = b + b_1 \quad (2)$$

2. $\triangle OEC \cong \triangle ODC$ (правоугли су $OE = OD$ и $OC = OC$), Из тога следи да је $\angle DOC = \angle COE$. Такође је $\triangle OAB \cong \triangle OEB$ (правоугли су, $OE = OA$ и $OB = OB$) па је $\angle EOB = \angle BOA$. Међутим је

$$\angle DOC + \angle COE + \angle EOB + \angle BOA = 180^\circ$$

$$2\angle COE + 2\angle EOB = 180^\circ$$

$$\angle COE + \angle EOB = 90^\circ.$$

3. Ако вредности за a из (2) заменимо у (1) имаћемо

$$(b + b_1)^2 = h^2 + (b - b_1)^2 \text{ тј. } h^2 = 4bb_1$$

$$h = 2\sqrt{bb_1}$$

па је

$$P = \frac{1}{2} (b + b_1) \cdot h = \frac{1}{2} (b + b_1) 2\sqrt{bb_1}$$

или

$$P = (b + b_1)\sqrt{bb_1}.$$

Мудрински Војислав уч. VIIId г.

»Св. Марковић« Нови Сад.

219. Задана је кружница $k \equiv \left(x + \frac{9}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{11}{4}\right)^2 = \frac{289}{16}$ и изван нје двије тачке $M\left(1 - 2\sqrt{2}; \frac{7 + 2\sqrt{2}}{4}\right)$ и $N\left(1 + 2\sqrt{2}; \frac{7 - 2\sqrt{2}}{4}\right)$ у равнини кружнице. Треба одредити аналитички и конструктивно оне кружнице, које пролазе тачкама M и N и диралу задану кружницу k .

Средишта кружница, што пролазе кроз M и N , налазе се на симетрали s тетиве MN . Нјезина је једнаджба $s \equiv y = 4x - \frac{9}{4} \dots I$.

Све кружнице, које пролазе кроз M , односно N , удовољјавају једнадзби

$$(1 - 2\sqrt{2} - p)^2 + \left(\frac{7 + 2\sqrt{2}}{4} - q\right)^2 = r^2,$$

односно

$$(1 + 2\sqrt{2} - p)^2 + \left(\frac{7 - 2\sqrt{2}}{4} - q\right)^2 = r^2.$$

Обавимо ли назаћене операције, те збројимо и скратимо назаћене једнадзбе, добивамо другу увјетну једнадзбу:

$$p^2 + q^2 - 2p - \frac{7}{2}q + \frac{201}{16} = r^2 \dots II.$$

Разумије се, да ћемо одбивши горње двије једнадзбе добити већ наведену једнадзбу под

$$I. \text{ т.ј. } q = 4p - \frac{9}{4} \dots I^*.$$

Трећи ћемо увјет добити употребивши познату релацију за двије кружнице које се диралу извана:

$$(p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2 = (r_1 + r_2)^2.$$

За наћ случај та релација гласи:

$$\left(-\frac{9}{4} - p\right)^2 + \left(-\frac{11}{4} - q\right)^2 = \left(\frac{17}{4} + r\right)^2 \dots III.$$

Ако у једнадзбу II. уврстимо једнадзбу I.* добивамо $p^2 - 2p + \frac{3}{2} = \frac{r^2}{17}$, а уврстимо

ли је у једнадзбу III. имат ћемо

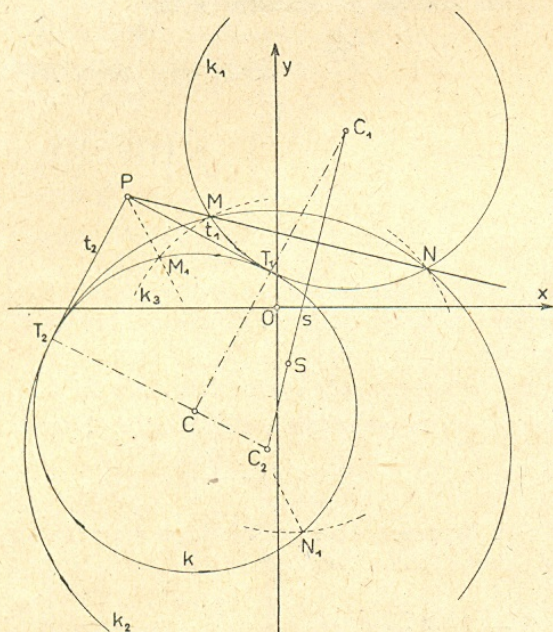
$$p^2 + \frac{p}{2} = \frac{r^2}{17} + \frac{r}{2} + \frac{3}{4}.$$

Odbijemo li ove jednadžbe, dobivamo

$$r = 5p - \frac{9}{2} \dots \text{IV.}$$

Pomoću rezultata u I*, II. i IV, dobivamo p, q, r za tražene kružnice, k_1 i k_2 t. j.

$$k_1 \left(\frac{7}{4}, \frac{19}{4}, \frac{17}{4} \right), k_2 \left(-\frac{3}{8}, -\frac{15}{4}, \frac{51}{8} \right).$$



Konstrukcija se izvodi pomoću potencijale dviju kružnica. — Nacrtavši zadane elemente i simetralu s izaberemo na s bilo koju točku S , pa oko nje opišemo pomoćnu kružnicu k_3 tako, da prolazi kroz M i N . Kružnica k_3 sjeći će kružnicu k u točkama M_1 i N_1 . Sekanta $\overline{MN}$ i sekanta $\overline{M_1N_1}$ sijeku se u polu P . Tangente povučene iz pola P na k t. j. t_1 i t_2 diraju k u T_1 i T_2 . Produžene spojnice CT_1 i CT_2 (C je središte zadane kružnice k) sijeku simetralu s u točkama C_1 i C_2 , a to su tražena središta kružnica k_1 i k_2 , kojima su polumjeri $\overline{C_1T_1}$ i $\overline{C_2T_2}$. Ovaj konstruktivni postupak može biti bažom analitičkom rješenju.

B. R. Rijeka

220. Neka se riješi i diskutira jednadžba

$$\sqrt{m^2x^2 + 1} = x - \frac{m}{2}.$$

Budući da je lijeva strana te jednadžbe pozitivna mora takova biti i desna strana. Dakle mora biti $x > \frac{m}{2}$. Kvadriranjem izlazi

$$m^2x^2 + 1 = x^2 - mx + \frac{m^2}{4} \quad \text{ili}$$

$$4x^2(m^2 - 1) + 4mx + 4 - m^2 = 0.$$

Treba ispitati, koliko ima ta jednadžba korijena većih od $\frac{m}{2}$. Samo je jedan korijen veći

od $\frac{m}{2}$, ako je $af\left(\frac{m}{2}\right) < 0$ t. j. ako je, jer je

$$f\left(\frac{m}{2}\right) = m^4 + 4, (m^2 - 1)(m^4 + 4) < 0 \text{ t. j.}$$

$-1 < m < 1$. Oba su korijena veća od $\frac{m}{2}$, ako

su ispunjeni ovi uvjeti:

$$D \geq 0, \quad af\left(\frac{m}{2}\right) > 0, \quad \frac{m}{2} < \frac{S}{2}.$$

Prvi je uvjet, jer je $D = (m^2 - 2)^2$, uvijek ispunjen, drugi je uvjet $4(m^2 - 1)(m^4 + 4) > 0$ ispunjen za vrijednosti, koje se ne nalaze između -1 i $+1$, treći je uvjet ispunjen za

$m < S$ t. j. $m < -\frac{m}{m^2 - 1}$, ili $m^3(m^2 - 1) < 0$

ispunjeno za $-\infty < m < -1$, $0 < m < 1$. Svi su ti uvjeti ispunjeni za $-\infty < m < -1$.

Za te vrijednosti od m zadatak ima 2 rješenja. S. Š.

221. Skrati razlomak

$$\frac{m^{12} + n^{12}}{m^5 + m^4n + mn^4 + n^5}.$$

Ako se zadani razlomak označi s A , imamo

$$\begin{aligned} A &= \frac{(m^4)^3 + (n^4)^3}{m^4(m+n) + n^4(m+n)} = \\ &= \frac{(m^4 + n^4)(m^8 - m^4n^4 + n^8)}{(m^4 + n^4)(m+n)} = \\ &= \frac{m^8 - m^4n^4 + n^8}{m+n}. \end{aligned}$$

Kovač Antal

uč. 6⁵ r. v. m. g. Sombor

222. Izračunaj

$$\begin{aligned} &\frac{(5c - 6d)^2 - (3a - 4b)^2}{25c^2 - (6d + 3a - 4b)^2} - \\ &\frac{25c^2 - (6d - 3a + 4b)^2}{36d^2 - (3a - 4b + 5c)^2} - \\ &\frac{36d^2 - (3a - 4b - 5c)^2}{(3a - 4b)^2 - (5c + 6d)^2}. \end{aligned}$$

Ako se traženi razlomak označi s A , tad je

$$\begin{aligned} A &= \frac{(5c - 6d + 3a - 4b)(5c - 6d - 3a + 4b)}{(5c + 6d + 3a - 4b)(5c - 6d - 3a + 4b)} - \\ &\frac{(5c + 6d + 3a - 4b)(5c + 6d - 3a + 4b)}{(6d + 3a - 4b + 5c)(6d - 3a + 4b - 5c)} - \\ &\frac{(6d + 3a - 4b - 5c)(6d - 3a + 4b + 5c)}{(3a - 4b + 5c + 6d)(3a - 4b - 5c - 6d)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{5c - 6d + 3a - 4b}{5c + 6d + 3a - 4b} + \frac{5c + 6d - 3a + 4b}{6d + 3a - 4b + 5c} +$$

$$+ \frac{6d + 3a - 4b - 5c}{3a - 4b + 5c + 6d} = \frac{5c + 6d + 3a - 4b}{5c + 6d + 3a - 4b} = 1.$$

Љиљана Гавриловић
5. р. 17 беог. г. Раковица

223. Nad svakom stranicom istostranična trokuta kao bazom i prema izvanjoj strani trokuta konstruiran je istokračni trokut, komu su kraci jednaki a . Neka se izračuna kut α na bazi tog trokuta, ako je površina šestokuta, koji je tako nastao, jednaka k^2 .

Izračunamo plošćino tako nastalog šestokotnika:

$$k^2 = \frac{3a_1 v}{2} + \frac{a_1^2}{4} \sqrt{3} = \frac{3 \cdot 2a \cos \alpha \cdot a \sin \alpha}{2} +$$

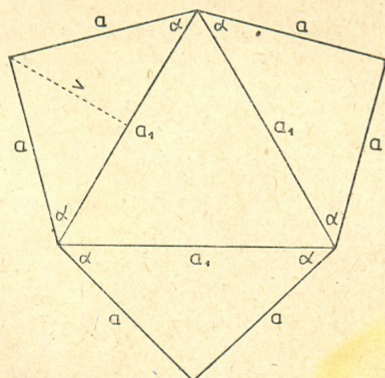
$$+ \frac{4a^2 \cos^2 \alpha \sqrt{3}}{4} = a^2 (3 \sin \alpha \cos \alpha + \sqrt{3} \cos^2 \alpha).$$

$$k^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = a^2 (3 \sin \alpha \cos \alpha + \sqrt{3} \cos^2 \alpha)$$

$$k^2 \sin^2 \alpha - 3a^2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha (k^2 - a^2 \sqrt{3}) = 0.$$

Po delenju s $\cos^2 \alpha$ dobivamo

$$k^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - 3a^2 \operatorname{tg} \alpha - a^2 \sqrt{3} + k^2 = 0.$$



Kakor se α mora nahajati med 0 in $\frac{\pi}{2}$, koreni te enačbe moraju biti realni in pozitivni. Naloga ima samo eno rešitev če je produkt korena negativan; zato

$$k^2 (k^2 - a^2 \sqrt{3}) < 0 \text{ ali } k^2 < a^2 \sqrt{3}.$$

Naloga ima 2 rešitve, če so ispolnjeni pogoji: 1) $D \geq 0$, 2) $S > 0$, $P > 0$ (S vsota korenov, P njihov produkt).

$$S = \frac{3a^2}{k^2} > 0 \text{ vedno ispolnjeno, } P > 0 \text{ za}$$

$$k^2 (k^2 - a^2 \sqrt{3}) > 0 \text{ ali } k^2 > a^2 \sqrt{3}, D = -4k^4 +$$

$$+ 4k^2 a^2 \sqrt{3} + 9a^4, D \geq 0 \text{ za}$$

$$a^2 \sqrt{3} \leq k^2 \leq \frac{3a^2}{2} \sqrt{3}.$$

Ti pogoji so ispolnjeni za

$$a^2 \sqrt{3} \leq k^2 \leq \frac{3a^2}{2} \sqrt{3};$$

če je posebno

$$k^2 = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}, \alpha = \frac{\pi}{6},$$

šesterokotnik je pravilen; če je

$$k^2 = a^2 \sqrt{3}, \operatorname{tg} \alpha = 0, \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3};$$

v oba slučaja dobimo enakostranični trikotnik.

Šmigoc Karel, 8b r. g. Celje

224. Решите уравнение

$$\frac{x + a^2}{(a+b-c)(a-b+c)} - \frac{b^2 + c^2 - x}{(c-a-b)(b-a-c)} = 1.$$

Извлечением -1 испред заграде из оба фактора имениюца другого члана бинорма на левој страни једначине добијамо:

$$\frac{x + a^2}{(a+b-c)(a-b+c)} - \frac{b^2 + c^2 - x}{(a+b-c)(a-b+c)} = 1$$

и даље

$$x + a^2 - b^2 - c^2 + x = (a+b-c)(a-b+c)$$

$$x + a^2 - b^2 - c^2 + x = a^2 - (b-c)^2$$

$$x + a^2 - b^2 - c^2 + x = a^2 - b^2 + 2bc - c^2$$

$$2x = 2bc, x = bc.$$

Миливој Брусин

уч. 7. р. Прве више меш. г. Зрењанин

225. Neka se odrede stranice b i c trokuta, komu je zadano a , površine P i $b = 3c$.

Ako se u Heronov obrazac

$$P^2 = \frac{b+c+a}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2}$$

stavi $b = 3c$, dolazi se do једнадџбе

$$64c^4 - 20a^2c^2 + a^4 + 16P^2 = 0.$$

Stranice b i c moraju udovoljavati uvjetu

$$b - c < a < b + c \text{ ili, jer je } b = 3c,$$

$$2c < a < 4c, 4c^2 < a^2 < 16c^2, \text{ t. j.}$$

$$\frac{a^2}{16} < c^2 < \frac{a^2}{4}. \text{ Načinimo } f\left(\frac{a^2}{16}\right) \text{ i } f\left(\frac{a^2}{4}\right);$$

nalazimo, da je i jedna i druga величина једнака $16P^2$. Zadatak bi imao samo једно рје-

šenje, kad bi bilo $f\left(\frac{a^2}{16}\right) f\left(\frac{a^2}{4}\right) < 0$, ali to ne može nikad biti ispunjeno.

Budući da je

$$af\left(\frac{a^2}{16}\right) > 0, \quad af\left(\frac{a^2}{4}\right) > 0,$$

zadatak ima 2 rješenja, ako je još

Donosimo i ovo lijepo planimetrijsko rješenje.

Pretpostavimo da je zadatak rešen. Neka je $CB = a$ i $b = 3c$ ili $b : c = 3 : 1$. Simetrala ugla BAC deli stranu BC tačkom D tako da je

$$CD : DB = b : c = 3 : 1 \quad (1)$$

Simetrala njegovog uporednog ugla daje svojim presekom s BC tačku E tako da je

$$EC : EB = b : c = 3 : 1 \quad (2)$$

$$D \geq 0 \text{ i } \frac{a^2}{16} < \frac{S}{2} < \frac{a^2}{4}, \quad D \geq 0 \text{ za } P \leq \frac{3a^2}{16},$$

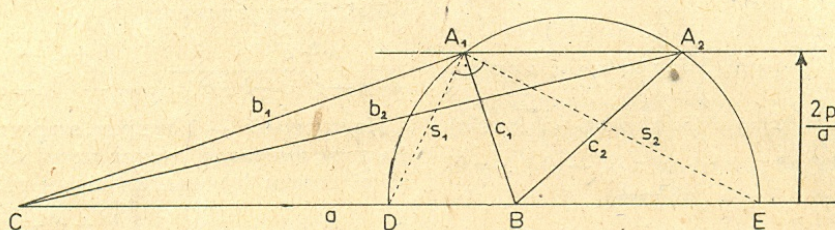
drugi je uvjet, kako se lako vidi, uvijek ispunjen.

Basar Ivan uč. 7b r. g. Karlovac

zatim na rastojanju $\frac{2P}{a}$ povučemo paralelu sa a , presek te paralele i kruga daće rešenje.

Iz (1) zaključujemo da je $DB = \frac{a}{4}$ a iz

(2) izlazi $BE = \frac{a}{2}$, prečnik $DE = \frac{3a}{4}$ a poluprečnik $\frac{DE}{2} = \frac{3a}{8}$.



Simetrale dva uporedna ugla su normalne međusobno pa je $\sphericalangle DAE = 90^\circ$. To znači da tačka A leži na krugu prečnika DE . Iz $ah =$

$= 2P$ izlazi da je $h = \frac{2P}{a}$.

Dakle ako stranu a podelimo harmonijski u razmeri $3:1$ i nad tako dobivenoj duži DE kao nad prečnikom opišemo krug, dobićemo jedno geometrijsko mesto temena A , pa ako

Zadatak će imati jedno dvostruko rešenje ako je $\frac{3a}{8} = \frac{2P}{a}$ t. j. $3a^2 = 16P$, dva rešenja

ako je $3a^2 > 16P$ a nijedno ako je $3a^2 < 16P$ s obzirom da su a i P realni pozitivni. Dakle za egzistenciju trougla ABC potrebno je da

$$3a^2 \geq 16P$$

Mudrinski Vojislav

uč. 7d r. g. »Sv. Marković«, Novi Sad

226. Neka se dokaže, da je a) produkt 2 uzastopnih cijelih brojeva djeliv s 12, kad je veći od tih brojeva potpuni kvadrat; b) produkt 3 uzastopnih cijelih brojeva djeljiv sa 60, kad je srednji broj potpuni kvadrat.

a) Uzastopna dva cijela broja glase:

$x, x + 1$. Kako je $x + 1 = m^2$, $x = m^2 - 1$, izlazi $(m^2 - 1)m^2 = (m + 1)(m - 1) \cdot m^2$. U naznačenom produktu jedan faktor je svakako djeljiv s 3, pa je i produkt djeljiv s 3. Dalje: ako je m parni broj, m^2 je djeljivo s 4; ako je m neparni broj, $m + 1$ djeljivo je s 2, a tako isto $m - 1$ je djeljivo s 2, pa je zato u oba slučaja bio m parni ili neparni broj, produkt djeljiv s 4. Kako je izraz djeljiv i s 3 i s 4, a 3 i 4 su rel. prosti, on je djeljiv s 12.

b) $(x-1) \cdot x(x+1)$ je djeljivo sa 60, kad
je $x = m^2$. Imamo

$$(m^2 - 1)m^2(m^2 + 1) = (m - 1)(m + 1)m^2(m^2 + 1).$$

Taj je produkt djeljiv s 12, kako je dokazano pod a). Ako je m mnogokratnik od 5, umnožak je djeljiv s 5, ako nije, m je jednog od oblika $m = 5q \pm 1$, $m = 5q \pm 2$ t. j. podijeljen s 5 daje jedan od ostataka 1, -1 , 2, -2 . Onda je $m^2 = 5Q + 1$ ili $m^2 = 5Q' + 4$. U prvom je slučaju $m^2 - 1$ djeljivo s 5, u drugom $m^2 + 1$ je djeljivo s 5. Dakle je u svakom slučaju umnožak djeljiv sa 60.

Nikolić Ilonka, 8. r. g. Đakovo

227. Нека се докаже да је полином

$$(x - y)^5 - (y - x)^3$$

дељив са $(x - y + 1)^2 - 2(x - y)$ и нека се одреди количник без дељења.

Нека је полином $(x-y)^5 - (y-x)^3 = A$
а полином $(x-y+1)^2 - 2(x-y) = B$.

Одатле следи да је:

$$A = (x - y)^5 - (y - x)^3$$

$$A = (x - y)^5 + (x - y)^3$$

$$A = (x - y)^3 [(x - y)^2 + 1]$$

$$B = (x - y + 1)^2 - 2(x - y)$$

$$B = (x - y)^2 + 2(x - y) + 1 - 2(x - y)$$

$$B = (x - y)^2 + 1.$$

Пошто полином $A = (x - y)^3 [(x - y)^2 + 1]$ садржи полином $B = (x - y)^2 + 1$ значи да је полином A дељив са полиномом B . Количник је једнак $(x - y)^3$.

Љубиша Шешић уч. 7₅ р. 11 беог. гимн.

Pravodobno riješili zadatke iz 4. br. 6. god.

Gros Mladen, 6 r. kl. g. Ljubljana, 208, 215; Janežič Jana, 8b r. 1. g. Ljubljana, 205, 209, 210, 211; Marković Vladimir, 8c r. g. »I. L. Ribara« Osijek, 204, 205, 206, 208, 209, 210, 211, 215 (djelomice); Boševski Tome, 8b кл. г. »Ј. Б. Тито«, Битола, све задатке 204-215; Голубовић Владимир, 7₁ р. г. Лесковац, 204, 205, 206, 209, 210, 215; Дуњић Хранислав, 8 р. г. Трстеник. 204 (дел.), 205, 206, 209. Борђевић Живојин, 8₄ р. г. Прокупље, 205, 206, 210; Јеремић Душан, 8с р. г. Ниш, 206, 209, 210, 213, 215; Караџалиев Димитар, 7а кл. г. »Ј. Јосифовски«, Гевгели, 209, 210.

Riješili zadatke iz 1. broja

Nada Gordana Babić, 8a r. g. Vinkovci, 216, 224; Basar Ivan, 7b r. g. Karlovac, 216, 218, 221, 222, 224, 226, 227; Begović Fehim, 6b r. g. Doboj, 224; Blagojević Aleksandar, 7. r. g. Čuprija, 221; Blagojević Nadežda, 7₁ r. gimn. Uroševac, 221, 224, 227; Brzica Marko, S.T.Š. 2e r. Sarajevo, 216; Čanji Ema, 7⁵ r. g. Sombor 216, 217, 218, 221, 222, 224, 226, 227; Gabrić M., 2₁ r. g. S. T. Š. Sarajevo, 216; Gojković Miloš, 2₁ r. maš. ots. S. T. Š. Sarajevo, 216, 222, 224; Grgić Josip, 6c r. g. Nova Gradiška, 224; Janežič Jana, 8b r. g. Ljubljana, 217, 218, 220, 221, 222, 224, 225, 227; Jovančević Svetozar, 7c r. gimn. »J. Jovanović Zmaj« Novi Sad, 216; Kanoni Jasna, 8b r. 10. g. Ljubljana, 216, 219, 220, 221, 223, 224, 225; Kovač Antal, 6₅ r. g. Sombor, 216, 221, 222, 224, 226, 227; Kulišić Petar, 7a r. gimn. Dubrovnik, 221, 224; Lekić Alija, 7b r. 4. g. Sarajevo, 216, 218, 222, 224, 227; Letić Milan, 6c r. g. Subotica, 222, 224; Lojen Miroslav, 6a r. g. Varaždin, 216, 218, 221, 222, 224, 227; Ljupša Danilo, 8c r. 1. g. Maribor, 216, 221, 224, 225, 226; Mančec Miljenko, 5b r. kl. g. Zagreb, 216, 227; Martinis Vinko, 8a r. g. »F. Višnjić«, Bijeljina, 216, 217, 218, 220 (djel.), 221, 222, 223, 224, 225 (djel.), 227; Mikićinac

Milivoj, 7d r. 3. g. Zagreb, 216, 221, 222, 224, 227; Nikolić Ilonka, 8 r. g. Đakovo, 216, 217, 221, 222, 224, 226, 227; Petričević Maja, 4c r. g. Zagreb, 216; Petrović Olga, 5 r. 17 beogradske gimn. Rakovica, 221, 222, 224, 227; Simić Dragana, 8₃ r. g. Čuprija, 218, 221, 222, 224; Šmigoc Karel, 8b r. 2. g. Celje, 223, 224; Tucović Ignjat, 5₁ r. 17 beogr. g. Rakovica, 222, 224; Vernić Olga, 5a r. 1. g. Zagreb, 216, 222; Virgonc Irena, 5₃ r. g. Zrenjanin, 221; Zečević Dragoljub, 6b r. g. Doboj, 216, 221, 222, 224; Брусин Миливој, 7₂ р. г. Зрењанин, 216, 217, 218, 221, 222, 224, 226, 227; Васковарцић Р. Станко, 7₁ р. г. Трстеник, 224; Гавриловић Љиљана, 5₁ р. 17 беогр. г. 221, 222, 224, 227; Грковић Вукосава, 8₂ р. г. Урошевац, 220; Грубнић Босиљка, 6а р. гимн. »Св. Марковић«, Нови Сад, 216; Дејковски Витомир, 8 кл. г. »Ј. Б. Тито« Битола, 216, 218, 220, 222, 222, 224; Димитријевић Љиљана, 8₂ р. г. Урошевац, 217, Дуњић Хранислав, 8b р. г. Трстеник, 216, 217, 218, 220, 221, 224, 225; Бенадић Драгољуб, 7₃ р. г. Прокупље, 216, 217, 218, 221, 224, 226; Борђевић Д. Владан, 8₇ р. гимн. Крушевац, 216, 216, 218, 220, 222, 224, 226, 227; Борђевић Живојин, 8₄ р. г. Прокупље, 216, 218, 220, 221, 222, 223, 224, 227; Јакшић Оливера, 7₄ р. 7 беогр. гимн. 217; Јеремић Душан, 8₃ р. г. »Св. Марковић«, Ниш, 216, 217, 218, 220, 221, 222, 224, 225, 226, 227; Јовановић Жарко, 8₃ р. г. »Св. Марковић«, Ниш, 216, 218, 221, 224; Караџалиев Димитар, 7а кл. г. »Ј. Јосифовски«, Гевгели, 218, 222, 224, 227; Ковачевић Д. Мирослав, 7₁ р. г. Трстеник, 220, 224; Маринов Трпче, 8 кл. г. »Ј. Б. Тито«, Битола 216, 218, 220, 221, 222, 224, 225, 227; Марковић Олга, 7 р. Урошевац 218, 227; Марковић Ратомир 6₂ р. г. Ћуприја, 221, 224, 226; Мудрински Војислав, 7д р. гим. »Св. Марковић« Нови Сад, 216, 217 218, 220, 221, 222, 224, 226, 227; Обрадовић Драгиша, 7₁ р. г. Ћуприја, 216; Павличевић С. Момир, 6₁ р. г. См. Паланка, 216; Поповић Љиљана, 7₄ р. 11 беогр. г. 216, 221, 224; Пузић Радивој, 6₁ р. г. Рума, 216; Радовановић Радмила, 5₃ р. гим. »Св. Марковић«, Ниш, 222; Савовић Томислав, 8₃ р. г. Приштина, 216, 218, 225; Станковић Б. Мирослав, 7₅ р. г. Прокупље, 216, 217, 218, 221, 222, 224, 227; Томић Бранислав, 7₄ р. г. Ћуприја, 216, 221, 222, 224; Чашиневски Симе, 7b р. г. Ј. Б. Тито, Битола, 216, 218, 221, 224; Чукалков Јован, 8д кл. г. Ј. Б. Тито, Битола, 216, 222, 224, 225; Шешић Љубиша, 7₅ р. 11 беогр. гимн. 216, 221, 224, 227.

D) Rješenja zadataka iz fizike

121*. Elastična kugla padne s visine $h=78,48\text{m}$ na horizontalnu elastičnu ploču i od nje se odbije brzinom, koja je jednaka $\frac{3}{4}$ brzine, kojom je kugla pala na ploču. Pita se 1) do koje će se visine kugla popeti; 2) koliko je vremena proteklo od početka gibanja kugle do momenta, kad je drugiput udarila o ploču? (Trenje i otpor zraka ne uzimamo u obzir.)

Rješenje: 1) Brzina, kojom je kugla s visine $h=78,48\text{m}$ pala na ploču je

$$v = \sqrt{2gh},$$

pa je prema tome (i prema zadatku) brzina kojom se kugla odbila

$$v_1 = \frac{3}{4}v = \frac{3}{4}\sqrt{2gh}.$$

Vrijeme uspinjanja t_1 kugle bit će, prema formuli za vrijeme uspinjanja pri vertikalnom hiku,

$$t_1 = \frac{v_1}{g} = \frac{3}{4} \frac{\sqrt{2gh}}{g}.$$

Visina uspinjanja h_1 bit će:

$$h_1 = v_1 t_1 - \frac{g}{2} t_1^2$$

$$h_1 = \frac{3}{4} \sqrt{2gh} \cdot \frac{3}{4} \frac{\sqrt{2gh}}{g} - \frac{g}{2} \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{2gh}{g^2}$$

$$h_1 = \frac{9}{16} \cdot 2h - \frac{9}{16}h = \frac{9}{16}h = \frac{9}{16} \cdot 78,48$$

$$h_1 = 44,14\text{m}.$$

2) Vrijeme T , koje je proteklo od početka gibanja kugle do momenta, kad je drugiput udarila o ploču, jednako je zbroju triju vremena: vremena t pri prvom padanju, vremena uspinjanja t_1 , i vremena t_2 pri drugom padanju:

$$T = t + t_1 + t_2.$$

Vrijeme t_2 pri drugom padanju jednako je vremenu uspinjanja t_1 , pa će biti:

$$T = t + 2t_1.$$

Budući da je

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

imamo

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}} + 2 \cdot \frac{3}{4} \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$T = \frac{5}{2} \sqrt{\frac{2h}{g}} = 5 \sqrt{\frac{h}{2g}} = 5 \sqrt{\frac{78,48}{2 \cdot 9,81}} = 5 \sqrt{4}$$

$$T = 10 \text{ sek.}$$

Riješili:

Žerjav Tone, 8.b r. g. Brežice; Šmigoc Karel, 8.b r. II. g. Celje; Šimunić Bruno, 8.d r. IV. g. Zagreb; Lojen Miroslav, 6.a r. g. Varaždin (djelomično); Čanji Ema, 7.r. mađ. g. Sombor; Miketinac Milivoj, 7.d r. III. gimn. Zagreb; Kovačević D. Miroslav, 7.r. g. Trstеник (прибл.); Бекадић Д. Драгољуб, 7.r. гим. Прокуље (делом.); Миљенко Тинтар, 7.r. г. Стари Бечеј (делом.); Basar Ivan, 7.b r. g. Karlovac; Kosec Vladislav, 8. raz. XII. g. Ljubljana, Momčilović Nemanja, 8. r. g. Šid (djelom.); Брусин Миливој, 7.r. в. г. Зрењанин; Борђевић Живојин 8.r. г. Прокупље; Кулишић Петар, 7.a r. g. Dubrovnik; Станковић Милоslav, 7.r. гимн. Прокупље, Grgić Josip, 6.c r. g. Nova Gradiška; Јеремић Душан, 8. раз. в. м. г. Ниш; Bognar Sandor, 7. r. v. m. g. Subotica; Карацалиев Димитар, 7 кл. Гевгелија (делом).

122*. Konično njihalo (= jednostavno njihalo, koje se giba po kružnici tako, da nit njihala pritom opisuje plašt stošca), dugačko je $l=0,25\text{m}$, a kut pri vrhu je $2\alpha=36^\circ$. Koliko je vrijeme T jednog okretaja njihala? A kolika je duljina l_1 onog jednostavnog njihala, kome bi dvostruko vrijeme njihanja bilo jednako vremenu okretaja T ?

Rješenje: 1) Pri vrtnji njihala je centripetalna, odnosno centrifugalna sila F , po veličini jednaka:

$$F = mg \operatorname{tg} \alpha,$$

ili centripetalna akceleracija a

$$a = g \operatorname{tg} \alpha.$$

U drugu ruku je

$$a = \frac{v^2}{r};$$

Izjednačenjem desnih strana dviju posljednjih formula izlazi

$$g \operatorname{tg} \alpha = \frac{v^2}{r}$$

odakle je

$$v = \sqrt{rg \operatorname{tg} \alpha}$$

Dalje će biti, ako sa T obilježimo vrijeme okretaja,

$$v \cdot T = 2r\pi$$

$$\sqrt{rg \operatorname{tg} \alpha} \cdot T = 2r\pi$$

$$T = \frac{2r\pi}{\sqrt{rg \operatorname{tg} \alpha}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g \operatorname{tg} \alpha}} = 2\pi \sqrt{\frac{l \cdot \cos \alpha}{g}}$$

$$T = 0,98 \text{ sek.}$$

2) Iz formule za vrijeme njihanja izlazi da je duljina l_1 njihala kojemu je vrijeme njihaja

$$t_1 = \frac{T}{2}, \quad l_1 = \frac{g \cdot t_1^2}{\pi^2} = \frac{9,81 \cdot 0,49^2}{3,14^2}$$

$$l_1 = 0,238 \text{ m.}$$

Riješili:

Šmigoc Karel, 8.b r. II. g. Celje; Žerjav Tone, 8.b r. g. Brežice; Miketinac Milivoj, 7.d r. III. g. Zagreb; Basar Ivan, 7.b r. g. Karlovac; Ђорђевић Живојин 8 p. r. Прокупље; Маринов Трпче 8 кл. в. г. Битола.

123. Zvuk zviždaljke na lokomotivi ima $n = 522$ titraja/sek. Lokomotiva se giba brzinom $v = 17$ m/sek pokraj mirnog promatrača. Koliki je broj titraja u sekundi tonova, što ih on čuje, kad lokomotiva nailazi, odnosno od njega odlazi?

Rješenje: Označimo li sa c brzinu zvuka (340 m/sek), čut će miran promatrač na zemlji, pri nailaženju lokomotive, ton zviždaljke s povećanom frekvencijom n_1 :

$$n_1 = \frac{n}{1 - \frac{v}{c}} = \frac{522}{1 - \frac{17}{340}} = \frac{522}{1 + \frac{1}{20}}$$

$$n_1 = 549,5 \text{ herca.}$$

Pri udaljivanju lokomotive čut će naš promatrač ton sa smanjenim brojem titraja n_2 :

$$n_2 = \frac{n}{1 + \frac{v}{c}} = \frac{522}{1 + \frac{1}{20}}$$

$$n_2 = 497,1 \text{ herca.}$$

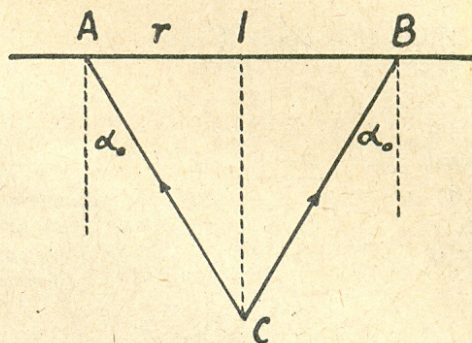
Riješili:

Lojen Miroslav, 6. a r. g. Varaždin; Žerjav Tone, 8.b r. g. Brežice; Miketinac Milivoj, 7.d r. III. g. Zagreb; Basar Ivan, 7. b r. g. Karlovac; Momčilo Nemanja, 8. r. g. Šid, (djelom.); Брусић Миливој, 7 p. в. г. Зрењанин; Маринов Трпче, 8 кл. в. г. Битола.

124. U tekućini, koja ima velik indeks loma $n = 2$, nalazi se izvor svjetlosti (žarulja), u dubini od 6 cm ispod površine tekućine. Koliki je polumjer kružnice, što je čine točke na površini tekućine, u kojima počinje totalna refleksija zraka svjetlosti, koje dolaze iz izvora svjetlosti?

Rješenje: Za granični kut α_0 , budući da je $\beta = 90^\circ$, vrijedi odnos:

$$\frac{\sin 90^\circ}{\sin \alpha_0} = n, \quad \sin \alpha_0 = \frac{1}{n} = \frac{1}{2}, \quad \alpha_0 = 30^\circ.$$



Kako je trokut ABC istostraničan, imamo, a je polumjer $r = \overline{AI}$ kružnice jednak:

$$\overline{CI} = r\sqrt{3}, \quad r = \frac{\overline{CI}}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

$$r = 3,46 \text{ cm.}$$

Riješili: Žerjav Tone, 8.b r. g. Brežice; Šmigoc Karel, 8.b r. II. g. Celje; Basar Ivan, 7.b r. gimn. Karlovac; Kosec Vladimir, 8. r. XII. g. Ljubljana; Маринов Трпче, 8 кл. в. г. Битола; Ђеремић Душан, 8 p. в. м. г. Ниш.

125. Generator od 115 volti ima unutrašnji otpor $1,5$ oma i upotrebi se za punjenje 40 akumulatora, serijskih povezanih. Unutrašnji otpor jednog akumulatora je $0,05$ oma; za vrijeme punjenja svaki akumulator djeluje konstantnom elektromotornom silom od $2,2$ volta (nasuprot elektromotornoj sili generatora). U krugu je ukopčan ampermetar, kojeg otpor možemo zanemariti. Pita se 1) koliki otpor moramo ukopčati (serijski) u krug struje, da se akumulatori nabijaju strujom od 5 ampera; 2) iz kruga uklonimo generator i zatvorimo opet krug; napetost svakog akumulatora je $2,1$ volta. Pita se a) smjer struje prema smjeru struje nabijanja; b) kolika je jakost struje; c) kakav ampermetar treba upotrebiti, da ne bismo morali premještati žice s njegovih stezaljki pri nabijanju akumulatora i pri njihovom izbijanju; 3) izbijanje uz konstantnu jakost struje traje osam sati; koliki je kapacitet baterije; 4) koliku energiju daju akumulatori za vrijeme izbijanja?

Rješenje: 1) Suma elektromotornih sila svih akumulatora zajedno, koja djeluje nasuprot elektromotornoj sili generatora jest

$$2,2 \cdot 40 = 88 \text{ volta}$$

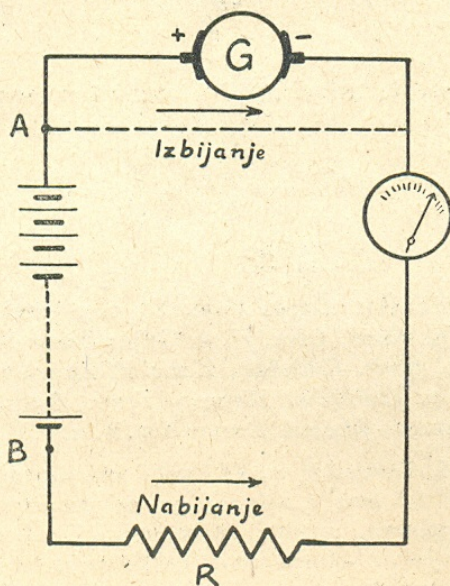
Suma svih otpora sastoji se iz unutrašnjeg otpora generatora ($1,5$ oma), zatim unutrašnjih otpora svih akumulatora ($0,05 \cdot 40 = 2$ oma) i ukopčanog nepoznatog otpora (R oma).

Za nalaženje otpora R imamo, dakle, formulu:

$$5 = \frac{115 - 88}{1,5 + 2 + R}$$

odakle izlazi $R = 1,9 \text{ oma}$.

1) Budući da je pozitivni pol generatora spojen sa pozitivnim polom baterije, teći će struja, za vrijeme nabijanja, kroz bateriju od pozitivnog pola baterije k negativnom polu.



Za vrijeme izbijanja, struja će teći od pozitivnog pola baterije preko otpornika k negativnom polu baterije, a unutar baterije dalje od negativnog pola kroz bateriju k pozitivnom polu, dakle u suprotnom smjeru negoli pri nabijanju baterije (v. sliku!).

b) Jakost struje i bit će pri (izbijanju):

$$i = \frac{40 \cdot 2,1}{0,05 \cdot 40 + 1,9} = \frac{84}{3,9}$$

$$i = 21,53 \text{ ampera.}$$

c) Upotrijebit ćemo ili toplinski ampermetar ili ampermetar s mekim željezom, u kojima je otklon nezavisan od smjera struje.

3) Kako je jakost struje $21,53 \text{ ampera}$, a traje osam sati, bit će kapacitet K akumulatora:

$$K = 11,53 \cdot 8$$

$$K = 172,24 \text{ ampersati.}$$

4) Cjelokupna električna energija E_c , što je daje baterija u cijelom krugu struje jest

$$E_c = 2,1 \cdot 40 \cdot 21,53 \cdot 3600 \cdot 8 \text{ džula}$$

$$E_c = 52085 \text{ kilodžula.}$$

Od te energije potroši se jedan dio (E') zbog otpora u unutrašnjosti baterije:

$$E' = V' \cdot i \cdot 3600 \cdot 8,$$

$$V' = R' \cdot i,$$

gdje je $R' = 0,05 \cdot 40 = 2 \text{ oma}$, unutrašnji otpor baterije. Dakle je

$$E' = Ri^2 \cdot 3600 \cdot 8 = 2 \cdot 21,53^2 \cdot 28800 \text{ džula}$$

$$E' = 26700 \text{ kilodžula.}$$

Prema tome se 26700 kilodžula pretvori unutar baterije u Jouleovu (Džulovu) toplinu, pa preostaje iskoristiva energija E_i :

$$E_i = E_c - E' = 52085 - 26700$$

$$E_i = 25385 \text{ kilodžula.}$$

Riješili:

Lojen Miroslav, 6.b r. g. Varaždin.

Naknadno, na vrijeme stigla rješenja zadataka iz 4. broja prošlog godišta

Kosec Vladislav, 8. r. XII. g. Ljubljana, zad. 117 i 119 (djelom.); Šmigoc Karel, 8.b r. II. gimn. Celje, zad. 118. (približno); Карацалев Димитар, 7 кл. г. Ђевђелија.

Vježbe u matematici za učenike viših razreda gimnazije

Što se sve može odrediti s pomoću Viète-ovih formula za kvadratnu jednadžbu?

Ako je zadana kvadratna jednadžba

$$(1) \quad ax^2 + bx + c = 0, \text{ to je}$$

$$(2) \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad (3) \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Ovo su Viète-ove formule za kvadratnu jednadžbu. Mi ćemo razmotriti redom, što sve možemo zaključiti iz tih formula.

I. Ako su korijeni jednadžbe (1) realni t. j. ako je $D = b^2 - 4ac \geq 0$, iz predznaka za zbroj

korijena $-\frac{b}{a}$ i za umnožak korijena $\frac{c}{a}$ mo-

žemo zaključiti ne riješivši jednadžbe da li su oba korijena ili pozitivna ili negativna ili je jedan pozitivan, drugi negativan i koji je po apsolutnoj vrijednosti veći.

Primjer 1. Kakvi su korijeni jednadžbe

$$20x^2 + 31x + 12 = 0?$$

Korijeni su realni, jer je

$$D = 31^2 - 80 \cdot 12 = 1$$

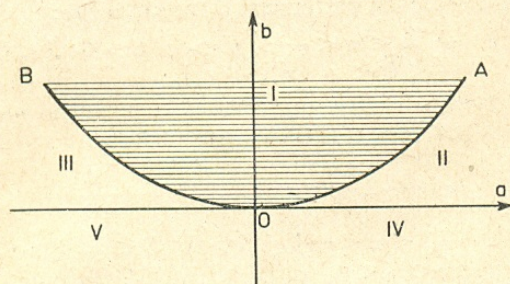
t. j. veće od nule. Kako je umnožak korijena pozitivan, oba korijena mogu biti ili pozitivna ili negativna; no jer je zbroj negativan, znači, da su oba korijena negativna.

Primjer 2. Kakovi su korijeni jednadžbe

$$12x^2 + x - 6 = 0?$$

Kako su a i c protivno označeni, D je sigurno > 0 ; umnožak je korijena negativan, znači, da je jedan korijen pozitivan, drugi negativan; a jer je zbroj negativan, znači dalje, da negativni korijen ima veću apsolutnu vrijednost.

Primjer 3. Ako su a i b koordinate neke točke T u ravnini, neka se odrede područja u ravnini, gdje su oba korijena jednadžbe $x^2 - ax + b = 0$ a) kompleksna, b) realna i pozitivna, c) realna i negativna, d) protivna



znaka, e) jednaka i pozitivna, f) jednaka i negativna, g) jedan korijen jednak nuli, a drugi negativan, h) jedan korijen jednak nuli, a drugi pozitivan, i) oba korijena protivna, j) oba korijena jednaka nuli.

Odredimo diskriminantu D , zbroj korijena S i umnožak korijena P . Imamo $D = a^2 - 4b$. $S = a$, $P = b$. U koordinatnom sistemu a , b nacrtajmo parabolu $a^2 - 4b = 0$ ili $b = \frac{a^2}{4}$ i razmatrajmo pravce $a = 0$, $b = 0$.

Dobivamo područja I, II, III, IV, V. U području I $a^2 - 4b < 0$. (Razmatrajmo bilo koju točku u tom području, na pr. točku na osi b , za nju je $a = 0$, pa je $-4b < 0$ t. j. $a^2 - 4b < 0$; to vrijedi za sve točke u tom području). Dakle zadatku pod a) odgovaraju sve točke u I; u II su a i b pozitivni t. j. i zbroj i umnožak korijena je pozitivan, sve točke u II odgovaraju zadatku pod b); u III je a t. j. zbroj negativan, a b t. j. produkt pozitivan, zadatku pod c) odgovaraju sve točke u III; u IV ili V je $a > 0$, $b < 0$ odnosno $a < 0$, $b > 0$; točke u IV ili V odgovaraju zadatku pod d), u IV je po apsolutnoj vrijednosti veći korijen pozitivan, manji negativan, u V je obrnuto; zadatku pod e) odgovaraju sve točke na grani krivulje OA , zadatku pod f) sve točke na grani OB , zadatku pod g) sve točke na negativnoj osi a , zadatku pod h) sve točke na pozitivnoj osi a , zadatku pod i) sve točke na negativnoj osi b , zadatku pod j) ishodište.

II. S pomoću Viète-ovih formula možemo lako odrediti 2 broja, kojih je zadan zbroj s i umnožak p .

Primjer 3. Neka se odrede 2 broja, kojih je zbroj 6, a umnožak -3 . Ti su brojevi korijeni jednadžbe

$$x^2 - 6x - 3 = 0, \quad x_1 = 3 + 2\sqrt{3}, \quad x_2 = 3 - 2\sqrt{3}.$$

III. S pomoću Viète-ovih formula može se lako napisati jednadžba, kojoj su korijeni zadani.

Primjer 4. Jednadžba, kojoj su korijeni

$$4 - \sqrt{5}, \quad 4 + \sqrt{5} \text{ jest } x^2 - 8x + 11 = 0.$$

IV. S pomoću Viète-ovih formula može se lako naći zbroj ili razlika istih potencija korijena ili recipročnih vrijednosti istih potencija korijena.

Tako je

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \\ &= \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = \\ &= \frac{b^3}{a^3} - 3 \frac{c}{a} \left(-\frac{b}{a} \right) = \frac{b^3 + 3abc}{a^3}. \end{aligned}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = -\frac{b}{a} : \frac{c}{a} = -\frac{b}{c},$$

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2x_2^2} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} : \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}.$$

Jer su x_1 i x_2 korijeni jednadžbe (1), to je

$$ax_1^2 + bx_1 + c = 0.$$

$$ax_2^2 + bx_2 + c = 0.$$

Pomnožimo li prvu jednadžbu s x_1^{n-2} , drugu s x_2^{n-2} , imamo

$$ax_1^n + bx_1^{n-1} + cx_1^{n-2} = 0,$$

$$ax_2^n + bx_2^{n-1} + cx_2^{n-2} = 0.$$

Zbrajanjem izlazi

$$aS_n + bS_{n-1} + cS_{n-2} = 0, \text{ gdje je } S_n = x_1^n + x_2^n.$$

Odatle možemo izračunati S_3 iz S_2 i S_1 , pa S_4 iz S_3 i S_2 i t. d.

Ako označimo

$$\frac{1}{x_1^n} + \frac{1}{x_2^n} = S'_n, \text{ to je } S'_n = \frac{S_n a^n}{c^n}.$$

Kako je $x_2 - x_1 = \frac{1}{a} \sqrt{b^2 - 4ac}$, to je

$$x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) = -\frac{b}{a^2} \sqrt{b^2 - 4ac},$$

$$\begin{aligned} x_2^3 - x_1^3 &= (x_2 - x_1)^3 + 3x_1x_2(x_2 - x_1) = \\ &= \frac{b^2 - ac}{a^3} \sqrt{b^2 - 4ac} \text{ i t. d.} \end{aligned}$$

S x_1 označujemo ovdje manji, a s x_2 veći korijen.

V. S pomoću Viète-ovih formula može se lako izračunati vrijednost koje simetrične funkcije korijena. Simetrična funkcija korijena je izraz, koji sadrži x_2 i x_1 i koji se ne mijenja, kad se u njemu zamijeni x_1 s x_2 , x_2 s x_1 .

Primjer 5. Zadana je jednačba $x^2 + 4x - 21 = 0$; neka se izračuna, a da se ne riješi jednačba, vrijednost izraza

$$\frac{3x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2}{x_1^3 + 2x_1^2x_2 + 2x_1x_2^2 + x_2^3}.$$

Izraz se može pisati

$$\frac{3(x_1^2 + x_2^2) - 4x_1x_2}{x_1^3 + x_2^3 + 2x_1x_2(x_1 + x_2)}.$$

Kako je $x_1 + x_2 = -4$, $x_1^2 + x_2^2 = 58$, $x_1^3 + x_2^3 = -316$, to je izraz jednak

$$\frac{174 + 84}{-316 + 168} = -\frac{129}{74}.$$

VI. S pomoću Viète-ovih formula može se odrediti relacija, koja mora postojati između a , b , c , da korijeni jednačbe $ax^2 + bx + c = 0$ udovoljavaju zadanom uvjetu $f(x_1, x_2) = 0$.

Primjer 6. Za koju vrijednost od m između korijena jednačbe

$$x^2 - (2m + 1)x + 5m - 4 = 0$$

postoji relacija $4x_2 - x_1 = 10$.

Moraju biti ispunjene jednačbe

$$x_1 + x_2 = 2m + 1, \quad x_1x_2 = 5m - 4, \quad 4x_2 - x_1 = 10;$$

iz prve i treće izlazi

$$x_2 = \frac{1}{5}(2m + 11),$$

$$x_1 = \frac{1}{5}(8m - 6);$$

što uvršteno u drugu jednačbu daje

$$16m^2 - 49m + 34 = 0$$

$$\text{i odatle} \quad m_1 = 2, \quad m_2 = \frac{17}{16}.$$

VII. S pomoću Viète-ovih formula može se lako odrediti, kako se mijenjaju korijeni neke jednačbe, u kojoj dolazi promjenljivi parametar, kad se taj parametar mijenja od $-\infty$ do $+\infty$.

Primjer 7. Neka se ispita, kako se mijenjaju korijeni jednačbe

$$(m + 3)x^2 - 4mx + 1 - m = 0,$$

kad se m mijenja od $-\infty$ do $+\infty$.

Treba najprije odrediti vrijednost od m , za koju je $D \geq 0$, zatim S i P i gledati, za koje su vrijednosti ti izrazi jednaki nuli t. j. za koje vrijednosti od m oni mijenjaju znak.

$D = 5m^2 + 2m - 3 \geq 0$ za vrijednosti, koje nisu sadržane između $m_1 = -1$, $m_2 = \frac{3}{5}$.

$$S = \frac{4m}{m+3}, \quad P = \frac{1-m}{m+3}.$$

Prvi razlomak mijenja znak za $m = 0$, $m = -3$; drugi za $m = 1$, $m = -3$. Sve navedene vrijednosti od m zovemo *karakterističnim* vrijednostima; treba ih poredati rastući:

$$-3, -1, 0, \frac{3}{5}, 1,$$

pa imamo da razlikujemo ove slučajeve:

$$1) -\infty < m < -3, \quad D > 0, \quad S > 0, \quad P < 0, \\ x_1 < 0 < x_2, \quad x_2 > |x_1|.$$

$$2) m = -3, \text{ jedan korijen beskonačno velik, drugi izlazi iz jednačbe za}$$

$$m = -3 \quad 12x + 4 = 0, \quad x = -\frac{1}{3}.$$

$$3) -3 < m < -1, \quad D > 0, \quad S < 0, \quad P > 0, \\ x_1 < x_2 < 0.$$

$$4) m = -1, \quad D < 0, \quad x_1 = x_2 = \frac{S}{2} = -1.$$

$$5) -1 < m < \frac{3}{5}, \quad D = 0, \text{ korijeni nisu realni.}$$

$$6) m = \frac{3}{5}, \quad x_1 = x_2 = \frac{S}{2} = \frac{1}{3}.$$

$$7) \frac{3}{5} < m < 1, \quad D > 0, \quad S > 0, \quad P > 0, \\ 0 < x_1 < x_2.$$

$$8) m = 1 \quad P = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$$

$$9) 1 < m < \infty, \quad D > 0, \quad S > 0, \quad P < 0, \\ x_1 < 0 < x_2, \quad x_2 > |x_1|.$$

VIII. S pomoću Viète-ovih formula možemo lako odrediti uvjet, koji mora biti ispunjen, da 2 kvadratne jednačbe

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0, \quad a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$$

imaju jedan zajednički korijen.

Ako su x_1, x_2 korijeni prve jednačbe, nužni i dovoljni uvjet, da je jedan od tih brojeva ujedno korijen i druge jednačbe, jest

$$(a_2x_1^2 + b_2x_1 + c_2)(a_2x_2^2 + b_2x_2 + c_2) = 0.$$

Ako to izmnožimo, izlučimo zajed. faktore i stavimo

$$x_1 + x_2 = -\frac{b_1}{a_1}, \quad x_1x_2 = \frac{c_1}{a_1},$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{b_1^2 - 2a_1c_1}{a_1^2}$$

i uredimo, vidimo da mora biti:

$$(a_1c_2 - a_2c_1)^2 - (a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1) = 0.$$

Taj se uvjet zove *rezolvanta* obiju zadanah jednačbi.

Primjer. Za koju vrijednost od a imaju obje jednačbe:

$$x^2 - 5x + a + 2 = 0, \quad x^2 - 7x + a + 6 = 0$$

zajednički korijen?

Mora biti

$$(a + 6 - a - 2)^2 - (-7 + 5)(-5a - 30 + 7a + 14) = 0, \quad 16 + 2(2a - 16) = 0, \quad a = 4.$$

Za $a = 4$ prva jednačba glasi $x^2 - 5x + 6 = 0$, druga $x^2 - 7x + 10 = 0$, a zajednički je korijen jednak 2.

Vježbe u rješavanju zadataka iz fizike

1. Klipni kompresor ima kapacitet 80 cm^3 , t. j. pri jednom pomaku klipa kompresora utisne se 80 cm^3 zraka (plina) u prostor za stlačivanje (recipijent). Prvobitan tlak u recipijentu kojemu volumen 1 litra, jednak je 1 atmosferi. Koliko puta mora klip potisnuti zrak u recipijent da tlak u recipijentu naraste na 5 atmosfera?

Rješenje. Nakon što klip n puta potisne zrak u recipijent, mora tlak narasti sa 1 atmosfere na 5 atmosfera. Budući da se pri jednom potiskivanju klipa, u recipijent utisne $\frac{80}{1000}$ litara zraka, bit će

$$n \cdot \frac{80}{1000} + 1 = 5,$$

odakle je $n = 50$.

2. U prostor za isisavanje zraka (recipijent) stavimo neko tijelo. Volumen je recipijenta 2 litre, a prvobitan tlak u recipijentu je 76 cm Hg ; nakon dva povlačenja klipom (dva isisavanja) tlak u recipijentu spadne na 19 cm Hg . Ako je volumen valjka, t. j. kapacitet kompresora, jednak 1 litri, koliki je volumen v tijela pod recipijentom?

Rješenje. Prije isisavanja bio je volumen V zraka u recipijentu:

$$V = 2 - v \text{ litre.}$$

Nakon 1. pomaka klipa (1. isisavanja), povećava se volumen plina za volumen valjka silaljke, pa će, po Boyle-Mariotteovu zakonu, biti novi tlak p_1 :

$$p_1 : 76 = (2 - v) : (2 - v + 1),$$

$$\text{ili: } p_1 = 76 \cdot \frac{2 - v}{2 - v + 1} \quad (1)$$

Nakon povratka klipa, ostat će u recipijentu opet volumen zraka $2 - v$, ali pod tlakom p_1 . Nakon drugog isisavanja rastegne se plin u

recipijentu ponovno na volumen $2 - v + 1$, pri čemu mu se smanji tlak na p_2 :

$$p_2 : p_1 = (2 - v) : (2 - v + 1)$$

$$p_2 = p_1 \cdot \frac{2 - v}{2 - v + 1}.$$

Uvrstimo li za p_1 vrijednost iz (1), imamo:

$$p_2 = 76 \cdot \left(\frac{2 - v}{2 - v + 1} \right)^2,$$

odakle lako nademo traženu vrijednost za volumen v tijela pod recipijentom:

$$\frac{2 - v}{2 - v + 1} = \sqrt{\frac{19}{76}} = \frac{1}{2}$$

$$v = 1 \text{ litra.}$$

Napomena. Pokažite da bi iza 3. isisavanja tlak p_3 bio

$$p_3 = 76 \cdot \left(\frac{2 - v}{2 - v + 1} \right)^3,$$

a općenito iza n isisavanja

$$p_n = 76 \cdot \left(\frac{2 - v}{2 - v + 1} \right)^n.$$

3. Dvije metalne kugle spec. težine $s_1 = 5$ i $s_2 = 10$ imaju (u vakuumu) jednake težine. Objesimo li po jednu od njih na svaku stranu poluge, pita se koliki je omjer pripadnih krakova, ako polugu zajedno s kuglama uronimo u vodu, a želimo ostvariti ravnotežu na poluzi?

Rješenje. Ako sa r_1 i r_2 obilježimo polumjere kugala, bit će njihove težine:

$$P_1 = \frac{4}{3} r_1^3 \pi s_1 \text{ grama}^* \quad \text{i}$$

$$P_2 = \frac{4}{3} r_2^3 \pi s_2 \text{ grama}^*,$$

a pripadni uzgoni u vodi

$$U_1 = \frac{4}{3} r_1^3 \pi \cdot 1 \text{ grama}^* \quad \text{i}$$

$$U_2 = \frac{4}{3} r_2^3 \pi \cdot 1 \text{ grama}^*.$$

Prema tome, označimo li pripadne krakove sa l_1 i l_2 , bit će ravnoteža na poluzi u vodi, ako je

$$(P_1 - U_1) \cdot l_1 = (P_2 - U_2) \cdot l_2,$$

ili

$$\frac{4}{3} r_1^3 \pi (s_1 - 1) \cdot l_1 = \frac{4}{3} r_2^3 \pi (s_2 - 1) \cdot l_2,$$

odakle izlazi $4 r_1^3 l_1 = 9 r_2^3 l_2$,

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{9 r_2^3}{4 r_1^3};$$

budući da iz jednakosti težina dviju kugala ($P_1 = P_2$) u vakuumu izlazi da je

$$\frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{s_2}{s_1} = \frac{2}{1}$$

imamo: $\frac{l_1}{l_2} = \frac{9 \cdot 1}{4 \cdot 2}$

ili konačno $\frac{l_1}{l_2} = \frac{9}{8}$.

4. Na koliko se duljini po zruci svjetlosti rasprostiru titraji svjetlosti sa izvora, koji je zabljesnuo svega jednu milijuntinu sekunde?

Rješenje. Tražena duljina d jednaka je putu s , što ga prewali početak svjetlosnog vala za vrijeme trajanja bljeska, t. j. za vrijeme jedne milijuntine (10^{-6}) sekunde; taj je put s jednak:

$$d = s = c \cdot t,$$

(gdje je $c = 300\,000 \text{ km/sek} = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/sek}$, t. j. brzina svjetlosti, a $t = 10^{-6} \text{ sek}$). Dakle je

$$d = 3 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-6} \text{ cm} = 3 \cdot 10^4 \text{ cm}$$

$$d = 300 \text{ m.}$$

5. Izolirani vodič kapaciteta $C = 150 \text{ elst. jed. kapaciteta}$ nabijen je na potencijal $V = 100 \text{ elst. jed. potencijala}$. Koliku brzinu v mora imati bačeni kamen mase $m = 400 \text{ grama}$, da bi imao jednaku energiju kao vodič?

Rješenje. Energija vodiča treba da bude jednaka kinetičkoj energiji kamena:

$$\frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} m v^2$$

$$v = V \cdot \sqrt{\frac{C}{m}} = 100 \cdot \sqrt{\frac{150}{400}}$$

$$v = 61,2 \text{ cm/sek.}$$

6. Čamac prelazi rijeku (poprijeko na njen smjer) brzinom $v = 1,8 \text{ m/sek}$. Rijeka je široka 54 m . Za vrijeme prijelaza, struja je čamac ponijela 15 m nizvodno. Kolika je brzina struje?

Rješenje. Čamac je prelazio rijeku za vrijeme t :

$$t = \frac{54}{1,8} = 30 \text{ sek.}$$

Za to vrijeme struja je ponijela čamac 15 m nizvodno, pa je prema tome, njena brzina v_1 :

$$v_1 = \frac{15}{30} = 0,5 \text{ m/sek.}$$

7. Brzi vlak se približava stanici konstantnom brzinom $c = 21 \text{ m/sek}$. Nakon što je isključen pristup parama u parni valjak lokomotive, vlak se zbog trenja jednoliko usporava.

Ako je koeficijent trenja $\mu = \frac{1}{200}$, kolika je retardacija (= smanjenje brzine u sekundi) tog usporenog gibanja? Koliki je put vlak pre-

valio u prvoj sekundi usporenog gibanja, te kolika mu je brzina na kraju te 1. sekunde?

Rješenje. Konstantna sila P , koja usporava vlak jednaka je dvijestotom dijelu tlaka (težine) $Q = mg$ vlaka na podlogu (tračnice), jer je

koeficijent trenja $\mu = \frac{1}{200}$:

$$\mu = \frac{P}{Q} = \frac{1}{200}$$

$$P = \frac{Q}{200} = \frac{mg}{200}$$

Ta trajna sila P usporava vlak, kojemu, po zakonu gibanja, daje retardaciju a :

$$P = \frac{mg}{200} = m a$$

$$a = \frac{g}{200} = \frac{981}{200} = 4,9 \text{ cm/sek}^2$$

$$a \approx 0,05 \text{ m/sek}^2.$$

Brzina v_1 na kraju 1. sekunde usporenog gibanja bit će, (prema formuli $v = c - at$):

$$v_1 = c - a = 21 - 0,05$$

$$v_1 = 20,95 \text{ m/sek.}$$

Prevaljeni pak put u 1. sekundi bit će, prema formuli $s = ct - \frac{a}{2} t^2$:

$$s_1 = c - \frac{a}{2} = 21 - 0,025$$

$$s_1 = 20,975 \text{ m.}$$

Vježbe iz matematike za prijemni ispit*

za učenike 8. r. osmog. škole (i 4. r. gimn.)

Aritmetika

Izračunaj:

$$1. A = (5a - 6b)^3 - (4a - 3b)^3.$$

$$A = 125a^3 - 450a^2b + 540ab^2 - 216b^3 - (64a^3 - 144a^2b + 108ab^2 - 27b^3) = 125a^3 - 450a^2b + 540ab^2 - 216b^3 - 64a^3 + 144a^2b - 108ab^2 + 27b^3 = 61a^3 - 306a^2b + 432ab^2 - 189b^3.$$

$$2. A = (3a^2 - 4a + 5)^3.$$

$$A = [(3a^2 - 4a) + 5]^3 = (3a^2 - 4a)^3 + 3(3a^2 - 4a)^2 \cdot 5 + 3(3a^2 - 4a) \cdot 25 + 125 = 27a^6 - 108a^5 + 144a^4 - 64a^3 - 15(9a^4 - 24a^3 + 16a^2) + 75(3a^2 - 4a) + 125 = 27a^6 - 108a^5 + 144a^4 - 64a^3 - 135a^4 + 360a^3 - 240a^2 + 225a^2 - 300a + 125 = 27a^6 - 108a^5 + 9a^4 + 296a^3 - 15a^2 - 300a + 125.$$

* Za učenike u onim narodnim republikama, gdje se taj ispit održava.

$$3. A = (4m^2 + 3n^2)^2 (4m^2 - 3n^2) - (2m^2 + 3n^2)^3.$$

$$A = (16m^4 - 9n^4)(4m^2 + 3n^2) - 8m^6 - 36m^4n^2 - 54m^2n^4 - 27n^6 = 64m^6 - 36m^2n^4 + 48m^4n^2 - 27n^6 - 8m^6 - 36m^4n^2 - 54m^2n^4 - 27n^6 = 56m^6 - 90m^2n^4 + 12m^4n^2 - 54n^6.$$

$$4. A = \left(\frac{3a}{4} - \frac{5b}{12}\right)^2 - \left(\frac{5a}{6} - \frac{b}{24}\right)^2.$$

$$A = \frac{9a^2}{16} - 2 \cdot \frac{3a}{4} \cdot \frac{5b}{12} + \frac{25b^2}{144} - \frac{25a^2}{36} + 2 \cdot \frac{5a}{6} \cdot \frac{b}{24} - \frac{b^2}{576}.$$

$$A = \frac{81a^2 - 100a^2}{144} - \frac{5ab}{8} + \frac{99b^2}{576} + \frac{5ab}{72}.$$

$$A = -\frac{19a^2}{144} - \frac{40ab}{72} + \frac{99b^2}{576} =$$

$$= -\frac{76a^2 - 320ab + 99b^2}{576}.$$

Zadatak se može riješiti također tako, da se A kao razlika kvadrata napiše kao produkt razlike i zbroja istih brojeva.

$$A = \left(\frac{3a}{4} - \frac{5b}{12} - \frac{5a}{6} + \frac{b}{24}\right) \left(\frac{3a}{4} - \frac{5b}{12} + \frac{5a}{6} - \frac{b}{24}\right) =$$

$$= \left(-\frac{a}{12} - \frac{9b}{24}\right) \left(\frac{19a}{12} - \frac{11b}{24}\right) =$$

$$= \left(-\frac{a}{12} - \frac{3b}{8}\right) \left(\frac{19a}{12} - \frac{11b}{24}\right) =$$

$$= -\frac{19a^2}{144} - \frac{160ab}{288} + \frac{11b^2}{64}.$$

$$5. A = \left(\frac{27x^8y^5}{35a^4b^5} + \frac{45x^3y^6}{14a^5b^3} - \frac{18a^2x^7}{49b^2y^3} - \frac{54b^2y^2}{77ax}\right) : \frac{81x^3y^3}{28a^2b^3}.$$

Treba pomnožiti dividend s recipročnom vrijednosti divizora. Izlazi

$$\frac{4}{15} \frac{x^5y^2}{a^2b^2} + \frac{10y^3}{9a^3} - \frac{8}{63} \frac{a^4bx^4}{y^6} - \frac{8}{33} \frac{ab^5}{x^4y}.$$

$$6. A = \frac{a^2 + 2b^2}{6a^2b} - \frac{6a^2 + 7b^2}{18ab^2} - \frac{3a - 5b}{30ab} +$$

$$+ \frac{2a - 3b}{9a^2} - \frac{b - 5a}{15b^2};$$

$$v[6a^2b, 18ab^2, 30ab, 9a^2, 15b^2] = 90a^2b^2.$$

$$A = \frac{15a^2b + 30b^3 - 30a^2 - 35ab^2 - 9a^2b + 15ab^2}{90a^2b^2} +$$

$$+ \frac{20ab^2 - 30b^3 - 6a^2b + 30a^3}{90a^2b^2} = \frac{0}{90a^2b^2} = 0.$$

$$7. A = \frac{(3a + 4b)^2}{24a^2} - \frac{(3a - 4b)^2}{18b^2} -$$

$$- \frac{(3a - 4b)(3a + 4b)}{12ab}. \text{ Pokus } a = -1,$$

$$b = -2. \text{ Zai. je nazivnik } 72a^2b^2. \text{ Zato je}$$

$$A = \frac{1}{72a^2b^2} [3b^2(3a + 4b)^2 - 4a^2(3a - 4b)^2 -$$

$$- 6ab(9a^2 - 16b^2)]$$

$$= \frac{1}{72a^2b^2} [3b^2(9a^2 + 24ab + 16b^2) - 4a^2(9a^2 -$$

$$- 24ab + 16b^2) - 54a^3b + 96ab^3] =$$

$$= \frac{1}{72a^2b^2} (27a^2b^2 + 72ab^3 + 48b^4 - 36a^4 +$$

$$+ 96a^3b - 64a^2b^2 - 54a^3b + 96ab^3) =$$

$$= \frac{1}{72a^2b^2} (-36a^4 + 42a^3b - 37a^2b^2 +$$

$$+ 168ab^3 + 48b^4).$$

Za $a = -1, b = -2, A$ ima vrijednost

$$\frac{(-11)^2}{24} - \frac{5^2}{72} - \frac{5(-11)}{24} = \frac{121}{24} - \frac{25}{72} + \frac{55}{24} =$$

$$= \frac{503}{72}, \text{ a rezultat } \frac{1}{288} (-148 + 1344 + 84 -$$

$$- 36 + 768) = \frac{1}{288} (2196 - 184) = \frac{2012}{288} = \frac{503}{72}.$$

Geometrija

8. Kad je prava p upravna na ravan α ? [Kad je upravna na 2 prave q i r u ravni α . U tom je slučaju ona upravna na svakoj pravoj koja ide u ravni α njezinim nožištem.]

Položi trougaonik tako, da mu je jedna kateta u ravni i druga kosa prema ravni. Razabiraš, ako je prava upravna na jednoj pravoj ravni α da nije upravna na ravni α].

9. Tačkom A povuci a) paralelu sa zadanom pravom, b) upravnu pravu na zadanu pravu p .

[Tačkom A i pravom p povuci ravan α i u toj ravni nacrtaj a) paralelu, b) upravnu pravu na zadanu pravu p].

10. Zadanom tačkom T povuci ravan paralelno sa zadanom ravni α .

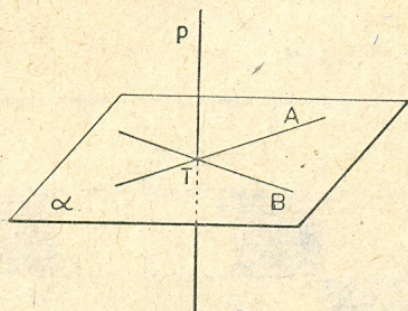
[U ravni α povuci po volji 2 prave $T'A'$ i $T'B'$ koje se seku i tačkom T pravu TA paralelnu s $T'A'$ i TB paralelnu s $T'B'$. Ravan β što je određuju prave TA i TB je tražena ravan].

11. Tačkom A povuci paralelu sa zadanom ravni α .

[Tačkom A povuci bilo koju ravan koja seče ravan α u pravoj p i u toj ravni povuci pravu p' paralelnu s pravom p].

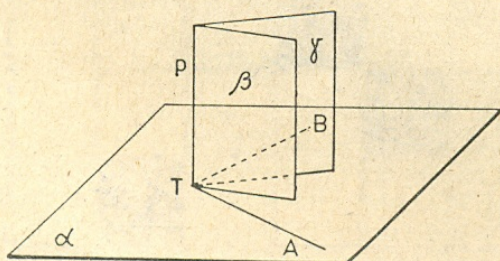
12. Zadanom tačkom povuci ravan upravnu na zadanu pravu p .

1) Neka je T na pravoj p . [Tačkom T povuci u 2 različita smjera 2 upravne pravne TA i TB na pravu p . Te dve upravne pravne određuju ravan α upravnu na pravu p].



2) Tačka T nije na pravoj p . [Tačkom T povuci pravu p' paralelnu s p . Ravan α upravna na p' u T također je upravna na p].

13. Zadanom tačkom povuci pravu upravnu na datu ravan α .



1) Tačka T je u ravni α .

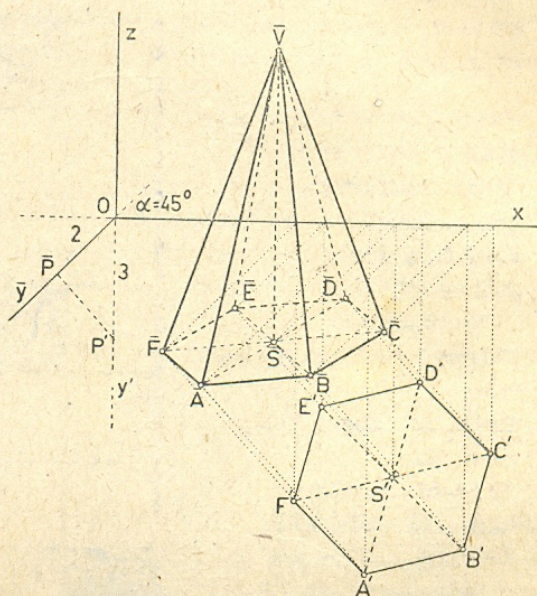
[Tačkom T povuci 2 pravne TA i TB u raznim smerovima; povuci zatim tačkom T ravan β upravnu na TB i ravan γ upravnu na TA ; presečnica obiju ravni β i γ je upravna na TA i TB , pa je upravna na ravan α].

2. Tačka T je izvan ravni α . [Tačkom T treba povući ravan paralelnu s α i zadatak je sveden na pređašnji, jer ako su 2 ravni paralelne, svaka pravna upravna na jednoj je upravna na drugoj ravni].

14. Nacrtaj kosu projekciju pravilne šestorostrane piramide, kojoj je baza u ravnini xy , a njeni bridovi nisu ni usporedni ni okomiti na osi x ($\alpha = 45^\circ$, $u = \frac{2}{3}$).

S x, y, z označili smo 3 osi, koje su među sobom okomite (v. sl.), njihovo je sjecište O ; osi x i z određuju ravninu xz ili π_2 (to je ravnina slike), osi x i y određuju ravninu xy ili π_1 . Os y okomita na π_2 projicira se koso u pravac y' , čije produženje preko točke O čini s osi x kut od 45° .

U ravnini xy ili π_1 uzeli smo pravilni 6-te-rokut $ABCDEF$, koji je baza pravilne 6-strane piramide, te smo ga zakrenuli za 90° oko osi x , tako da je došao u ravninu slike π_2 ili xz u položaj $A'B'C'D'E'F'$.



Da nacrtamo kosu projekciju pravilnog šestorokuta, nacrtat ćemo najprije *odredbeni trokut*, t. j. trokut, koji se dobiva, ako nacrtamo okomicu y' na os x i ako je $n = \frac{2}{3}$, na nju nanese 3 dijela, a na os y 2 takova dijela t. j. $O\bar{P} = \frac{2}{3} OP'$ i spojimo $\bar{P}$ s P' .

Zatim se povuku iz $A'B'C'D'E'F'$ paralele s y' sve do osi x , iz točaka, gdje te paralele sijeku os x , paralele s $\bar{y}$ i napokon iz $A'B'C'D'E'F'$ paralele s $P'\bar{P}$.

Dobiven je šestorokut $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}\bar{F}$ kosa projekcija zadanog pravilnog šestorokuta; kad je kosa projekcija baze nacrtana, u njezinom središtu $\bar{S}$ uzdignimo okomicu na tu bazu pa na nju prenesimo pravu veličinu visine piramide. Tako smo dobili kosu projekciju $\bar{V}$ vrha piramide V i napokon spojimo $\bar{V}$ s vrhovima osnovke.

Matematička križaljka

MILAN KRAJNOVIĆ, Zagreb

U svako kvadratno polje ne dolazi po jedno slovo, već po jedna arapska cifra!

Vodoravno:

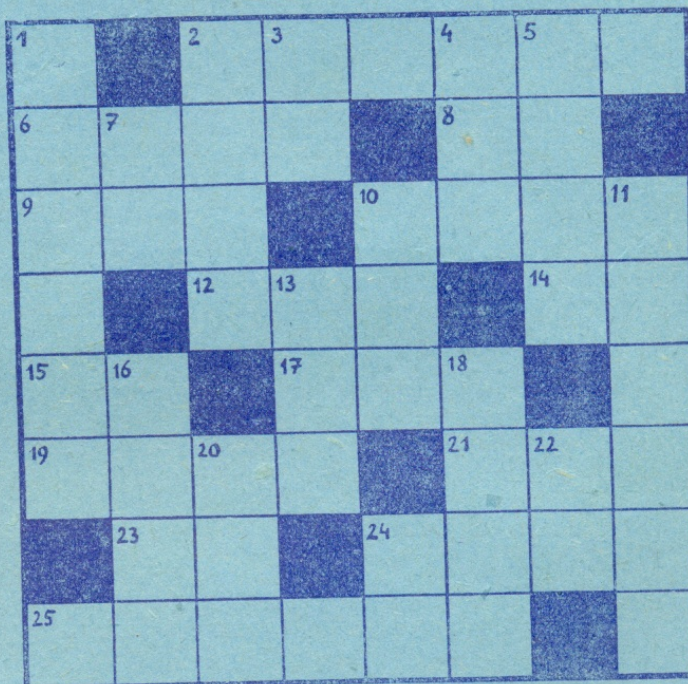
2. Peta potencija broja 13
6. Broj minuta u kutu pravilnog petekuta
8. Polumjer kružnice, upisane istostraničnom trokutu, kojemu je opseg $354\sqrt{3}$
9. Volumen kvadratne piramide, kojoj je osnovni brid 8, a visina 24

10. Prve 4 cifre broja $\sqrt{78}$
12. Kao 9. vodoravno
14. Visina istokračnog trapeza, kojemu su baze 98 i 2, a krak 73
15. $3(3+3 \cdot 3) - (3-3:3) - (3:3-3)$
17. Najveći trocifreni prim broj
19. Broj, od koga 12% iznosi 531
21. Najveći trocifreni broj
23. Rješenje jednadžbe $3 + 0,05(1-x) = 0$
24. Vrijednost polinoma $9x^4 - 11x^3 + 7x^2 + 19x + 819$ za $x = -5$
25. Period kvocijenta $777:1001$

Uspravno:

1. Oplošje kocke s bridom 333
2. Najmanji zajednički višekratnik brojeva 153 i 225

3. Rješenje jednadžbe $(3x-10):x = 20:7$
4. Broj dijagonala u 24-erokutu
5. Suma svih neparnih brojeva između 650 i 680
7. Udaljenost točaka A (5,3), B (45,12)
10. Najveća zajednička mjera brojeva 6006 i 7293
11. Produkt 2 primbroja, koji su najbliži broju 500
13. Prostorna dijagonala kvadra s dimenzijama 45, 108 i 156
16. Broj sekundi u $1^{\circ}47'47''$



KUPON ZA MATEM. KRIŽALJKU

Ime i prezime:

Razred i škola:

Mjesto:

18. Vrijednost polinoma $9x^4 - 11x^3 + 7x^2 + 19x + 903$ za $x = -5$
 20. Oplošje kvadratne prizme bridova 3 i 16,5
 22. Diferencija recipročnih vrijednosti brojeva 0,01 i 1
 24. Polumjer kružnice, upisane rombu s dijagonalama 240 i 180
- Rješenje (uz prilog ispunjenog kupona) poslati do 21. I. 1957.

Na kuverti naznačiti: »Mat. križaljka«. Između učenika, koji ispravno riješe križaljku, ždrijebom će se izvući njih 10 i nagraditi matematičkim knjigama. Rješenje križaljke i imena nagrađenih objavit će se u narednom broju.

Za vrijeme štampanja lista stigla su ova rješenja:

Грубишић Петар, 7^a р. г. Приштина, 216, 218; *Курђачки Смиља*, 6^a раз. г. Врбас, 216, 221, 222, 224; *Милачић Шпиро*, с. т. шк. Титоград, 216, 218, 221; *Трипковић Гойко*, с. т. шк. Титоград, 218, 221; *Bognar Šandor*, 8 раз. г. Subotica, 216, 221, 224, 227; *Ibrahimović Šemsudin*, 6^a р. gimn. Brčko, 221, 222, 224; *Simeunović Milivoj*, 8^a р. 11 beogr. gimn. 216, 221, 224; *Grubin Nada*, uč. 7^a р. г. Zrenjanin, 218, 221, 224; *Mačovec Marijan*, 1^a р. K. O. Tehnička skola Zagreb, 227, 121 (djel.); *Пајух Мирослав* 8 р. г. Зрењанин, 223, 121.

Rješenja, dopire i članke slati na Uredništvo »Matem.-fiz. lista«, Zagreb, Ilica 16/III., pošt. pretinac 165.

Svim suradnicima!

Molimo sve suradnike, da crteže uz članke izrađuju uredno, pregledno i točno, po mogućnosti tušem na posebnom papiru.

Rješavateljima zadataka

U rješenjima treba uvijek napisati i sam zadatak s rednim brojem, ne pozivajući se na broj i datum »Mat.-fiz. lista«, u kome je bio postavljen. Svako rješenje zadataka pisati na posebnom papiru (četvrtini ili pola arka) i to samo na jednoj strani papira. — Svako rješenje treba čitljivo potpisati (ime i prezime), naznačujući razred, gimnaziju i mjesto. Nečitljiva i neuredna rješenja ne će se uopće uzeti u obzir.

Umoljavaju se rješavatelji, da samostalno rješavaju zadatke ne tražeći pomoći od nastavnika, a niti od koga drugoga. Umoljavaju se također rješavatelji, da propisno frankiraju listove, koje šalju našoj redakciji.

Savez Društava matematičara i fizičara FNRJ izdaje časopis

NASTAVA MATEMATIKE I FIZIKE

Pretplata iznosi za članove društava matematičara i fizičara 300 Din, a za škole i biblioteke 400 Din. Pretplatu i narudžbe slati izdavačkom poduzeću »Nolit«, Beograd, Narod. fronta 76, na ček. račun br. 1031-T-627 sa naznakom za časopis »Nastava mat. i fiz.« ili na žiro račun »Nastave matematike i fizike« 10-KB-2-Ž-1262

Za Narodnu Republiku Hrvatsku pretplata se šalje na ček. upl. 40-KB-6-Ž-1133 ili uputnicom Hrv. prirodosl. društvo, Zagreb, Ilica 16/III. kat uz naznaku da je za »Nastavu«

DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA NR HRVATSKE IZDAJE ČASOPIS

GLASNIK

MATEMATIČKO-FIZIČKI I ASTRONOMSKI

Pretplata za 1956. godinu iznosi Din 480 i šalje se na administraciju GLASNIKA: Hrvatsko prirodoslovno društvo — Zagreb, Ilica 16/III.

Cekovni račun 40-KB-6-Ž-1077 za Društvo matematičara i fizičara NRH

Godišnja članarina za društvo je Din 240. — Članovi primaju Glasnik uz nadoplatu Din 240